Материалы для проведения регионального этапа

XLI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2014–2015 учебный год

Второй день

2–3 февраля 2015 г.

Москва, 2014

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, Г. М. Иванов, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, К. А. Кноп, А. Н. Магазинов, А. Д. Матушкин, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, В. А. Сендеров, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2014–2015 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 2 и 3 февраля 2015 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждого класса. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

В связи с тем, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с рекомендацией Министерства образования и науки РФ. Именно, каждый тур может начинаться только в интервале от 5.00 до 9.00 **по московскому времени**.

Организаторы регионального этапа в том или ином субъекте РФ могут сами установить время начала каждого тура, но оно не должно выходить за пределы указанного интервала.

Рекомендуется итоговую проверку, разбор/показ, апелляции планировать в отдельный день.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. 5.

Решение. Рассмотрим некоторый момент, когда рейтинг уменьшился на 1. Пусть перед этим проголосовало n человек, и рейтинг был целым числом x. Значит, сумма баллов стала равна nx. Пусть следующий зритель выставил y баллов. Тогда сумма баллов стала равна $nx+y = (n+1)(x-1)$, откуда $y = x-n-1$. Наибольшее возможное значение x равно 10, а наименьшее возможное значение n равно 1; значит, наибольшее значение y (на первом таком шаге) равно 8.

С каждым следующим шагом значение x уменьшается на 1, а значение n увеличивается на 1. Следовательно, на втором шаге значение y не превосходит 6, на третьем — 4, и т.д. Поскольку любая оценка не меньше 0, число шагов не превосходит 5.

Осталось показать, что пять шагов возможны. Пусть рейтинг в момент T равен 10 (при 1 проголосовавшем), затем второй зритель выставляет 8 баллов, третий — 6, четвёртый — 4, пятый — 2, а шестой — 0. Тогда рейтинг последовательно принимает значения 9, 8, 7, 6 и 5.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только приведен пример, в котором проголосовало 5 зрителей — 2 балла.

Доказано с полным обоснованием, что более 5 зрителей проголосовать не могло (но пример отсутствует или неверен) — 5 баллов.

9.6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

(*Д. Барабаш, Б. Обухов*)

Первое решение. Отложим на продолжении BC за точку C отрезок $CN = LC$ (см. рис. 1). Тогда $CB + CL = NB$, и нам надо доказать, что $AB = NB$.

Так как четырёхугольник $ABLK$ вписан, имеем $\angle CKB = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - \angle ALB = \angle ALC$. С другой стороны, прямоугольные треугольники ACL и ACN равны по двум катетам, так что $\angle ANC = \angle ALC = \angle CKB = 90^\circ - \angle B/2$. Тогда из треугольника ABN имеем $\angle BAN = 180^\circ - \angle B - \angle ANB = 180^\circ - \angle B - (90^\circ - \angle B/2) = 90^\circ - \angle B/2 = \angle ANB$. Из полученного равенства $\angle ANB = \angle BAN$ и следует, что $AB = NB$.

Замечание. Существует несколько вариаций вышеприведённого решения. Например, из равенства $\angle ABK = \angle CBK$ вытекает, что $KA = KL = KN$; кроме того, $\angle KAB = \angle KLC = \angle KNC$. Отсюда нетрудно получить, что $\angle AKB = \angle NKB$, а значит, треугольники BKA и BKN равны.

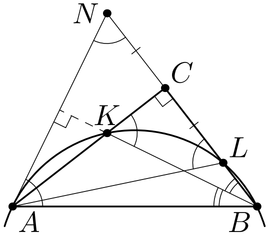


Рис. 1

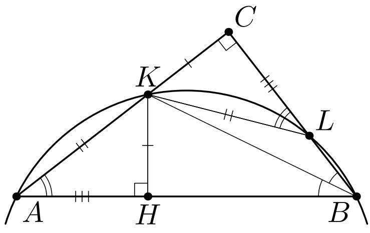


Рис. 2

Второе решение. Опустим из точки K перпендикуляр KH на гипотенузу AB (см. рис. 2). Прямоугольные треугольники KCB и KHB равны по гипотенузе и острому углу ($\angle KBC = \angle KBH$). Значит, $CB = HB$ и $KC = KH$. Далее, в окружности, описанной около $AKLB$, на хорды AK и KL опираются равные углы, поэтому $AK = KL$. Значит, прямоугольные треугольники KHA и KCL равны по катету и гипотенузе, откуда $HA = CL$. Итак, $CB + CL = HB + HA = AB$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Выполнено дополнительное построение, ведущих к решению (например, сторона BC продолжена на длину CL, или рассмотрено основание перпендикуляра, опущенного из K на AB) — 1 балл.

9.7. Числа a, b, c и d таковы, что $a^2+b^2+c^2+d^2=4$. Докажите, что $(2+a)(2+b)\geqslant cd$. (*А. Храбров*)

Решение. По неравенству о средних имеем

$$cd \leqslant |cd| = \sqrt{c^2d^2} \leqslant \frac{c^2+d^2}{2} = \frac{4-a^2-b^2}{2}.$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$(2+a)(2+b) \geqslant \frac{4-a^2-b^2}{2}.$$

Перенесём все в левую часть, домножим на 2 и раскроем скобки. Мы получим эквивалентное неравенство

$$4+4a+4b+2ab+a^2+b^2 \geqslant 0.$$

Левая часть последнего неравенства переписывается в виде

$$4+4(a+b)+(a+b)^2 = (2+a+b)^2;$$

значит, это выражение неотрицательно, что и требовалось доказать.

Замечание. Как нетрудно видеть из решения, равенство достигается тогда и только тогда, когда $a+b=-2$ и $c=d$. Отсюда, в частности, следует, что в любом правильном решении, не содержащем разбора случаев, для описанных наборов a, b, c, d все промежуточные неравенства должны обращаться в равенства.

Комментарий. Задача решена в предположении, что числа a, b, c, d неотрицательны — 0 баллов.

9.8. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Сколько последовательностей ему придётся выписать? (*И. Богданов*)

Ответ. $3^{100}-2^{100}$.

Первое решение. Обозначим $n=100$. Назовём последовательность из n натуральных чисел, любые два соседних члена которой различаются не больше, чем на 1, *интересной*. Каждой интересной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сопоставим *разностную* последовательность $b_i = a_{i+1} - a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Все члены разностной последовательности равны 0 или ± 1, так что количество всевозможных разностных последовательностей равно 3^{n-1}.

Посчитаем сначала количество S всех интересных последовательностей, минимальный член которых не превосходит 3. Рассмотрим произвольную разностную последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_{99}$. Любые две интересные последовательности, соответствующие ей, отличаются прибавлением одного и того же числа к каждому члену. Значит, среди них ровно по одной последовательности с минимальным членом, равным 1, 2 и 3. Таким образом, $S = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$.

В S учтены все последовательности, выписываемые Петей, и несколько *лишних* — тех, в которых не встречается 3. Ясно, что, если в интересной последовательности встречаются как числа, большие 3, так и меньшие 3, то и 3 тоже встречается. Но минимальный член каждой лишней последовательности не больше 2, значит, и все их члены не превосходят 2. Итак, все лишние последовательности состоят из единиц и двоек. С другой стороны, каждая последовательность из единиц и двоек является интересной, и, стало быть, лишней.

Итого, лишних последовательностей ровно 2^n, а значит, искомое количество равно $S - 2^n = 3^n - 2^n$.

Второе решение. Назовём *хорошей* последовательность из n натуральных чисел, в которой хотя бы раз встречается тройка, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 1. Обозначим через S_n количество хороших последовательностей длины n. Мы докажем индукцией по n, что $S_n = 3^n - 2^n$. База индукции при $n = 1$ очевидна.

Сделаем переход от n к $n+1$. Назовём хорошую $(n+1)$-членную последовательность A *отличной*, если среди первых её n членов встречается тройка. Откинем от каждой отличной последовательности её последний член; в каждом случае мы получим хорошую n-членную последовательность. При этом, если хорошая n-членная последовательность A' оканчивается числом 1, то она получается таким образом из двух отличных —

оканчивающихся числом 1 или 2. Если же A' оканчивается числом $k > 1$, то она получается из трёх отличных, у которых в конце стоит $k-1$, k или $k+1$. Итак, если количество n-членных хороших последовательностей, оканчивающихся числом 1, равно T_n, то количество отличных $(n+1)$-членных последовательностей равно $2T_n + 3(S_n - T_n) = 3S_n - T_n$.

Осталось посчитать количество неотличных $(n+1)$-членных последовательностей. Ясно, что каждая из них оканчивается числом 3; если эту тройку откинуть, получится n-членная последовательность A' без троек. Поскольку её соседние члены отличаются не больше, чем на 1, то либо все они больше 3, либо все меньше 3.

Если все члены A' меньше 3, то A' состоит из чисел 1 и 2, оканчиваясь числом 2. При этом любая такая последовательность, дополненная в конце тройкой, даст хорошую. Значит, такие последовательности A' получаются ровно из 2^{n-1} неотличных.

Пусть теперь все члены A' больше 3; тогда она оканчивается на четвёрку. Вычтя из всех её членов по 3, мы получим либо хорошую последовательность, оканчивающуюся числом 1 (если в полученной последовательности содержится 3) — таких ровно T_n; либо последовательность из единиц и двоек, оканчивающуюся числом 1 — таких ровно 2^{n-1}. Итого, последовательностей последнего типа есть $T_n + 2^{n-1}$.

В итоге мы получаем, что $S_{n+1} = (3S_n - T_n) + 2^{n-1} + (T_n + 2^{n-1}) = 3S_n + 2^n = 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Переход доказан.

Комментарий. Только ответ — 1 балл.

Если задача решается для последовательностей из n чисел, но разобраны лишь случаи небольших значений n (скажем, $n \leqslant 6$) — 0 баллов.

При подходе, аналогичном первому решению, неверно подсчитано количество лишних последовательностей — снять 3 балла.

При индуктивном подходе, аналогичном второму решению, неверно произведён учёт последовательностей, в которых тройка стоит только на последнем месте — ставить не более 3 баллов.

10 класс

10.5. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. 5.

Решение. Рассмотрим некоторый момент, когда рейтинг уменьшился на 1. Пусть перед этим проголосовало n человек, и рейтинг был целым числом x. Значит, сумма баллов стала равна nx. Пусть следующий зритель выставил y баллов. Тогда сумма баллов стала равна $nx+y=(n+1)(x-1)$, откуда $y=x-n-1$. Наибольшее возможное значение x равно 10, а наименьшее возможное значение n равно 1; значит, наибольшее значение y (на первом таком шаге) равно 8.

С каждым следующим шагом значение x уменьшается на 1, а значение n увеличивается на 1. Следовательно, на втором шаге значение y не превосходит 6, на третьем — 4, и т.д. Поскольку любая оценка не меньше 0, число шагов не превосходит 5.

Осталось показать, что пять шагов возможны. Пусть рейтинг в момент T равен 10 (при одном проголосовавшем), затем второй зритель выставляет 8 баллов, третий — 6, четвёртый — 4, пятый — 2, а шестой — 0. Тогда рейтинг последовательно принимает значения 9, 8, 7, 6 и 5.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только приведен пример, в котором проголосовало 5 зрителей — 2 балла.

Доказано с полным обоснованием, что более 5 зрителей проголосовать не могло (но пример отсутствует или неверен) — 5 баллов.

10.6. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

(*Д. Барабаш, Б. Обухов*)

Первое решение. Отложим на продолжении BC за точку C отрезок $CN = LC$ (см. рис. 3). Тогда $CB + CL = NB$, и нам надо доказать, что $AB = NB$.

Так как четырёхугольник $ABLK$ вписан, имеем $\angle CKB = 180^\circ - \angle AKB = 180^\circ - \angle ALB = \angle ALC$. С другой стороны, прямоугольные треугольники ACL и ACN равны по двум катетам, так что $\angle ANC = \angle ALC = \angle CKB = 90^\circ - \angle B/2$. Тогда из треугольника ABN имеем $\angle BAN = 180^\circ - \angle B - \angle ANB = 180^\circ - \angle B - (90^\circ - \angle B/2) = 90^\circ - \angle B/2 = \angle ANB$. Из полученного равенства $\angle ANB = \angle BAN$ и следует, что $AB = NB$.

Замечание. Существует несколько вариаций вышеприведённого решения. Например, из равенства $\angle ABK = \angle CBK$ вытекает, что $KA = KL = KN$; кроме того, $\angle KAB = \angle KLC = \angle KNC$. Отсюда нетрудно получить, что $\angle AKB = \angle NKB$, а значит, треугольники BKA и BKN равны.

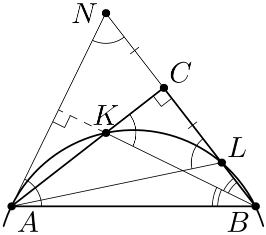


Рис. 3

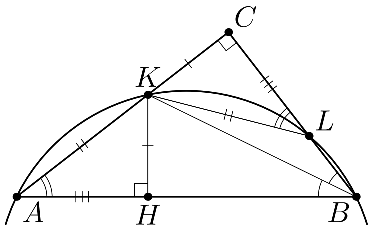


Рис. 4

Второе решение. Опустим из точки K перпендикуляр KH на гипотенузу AB (см. рис. 4). Прямоугольные треугольники KCB и KHB равны по гипотенузе и острому углу ($\angle KBC = \angle KBH$). Значит, $CB = HB$ и $KC = KH$. Далее, в окружности, описанной около $AKLB$, на хорды AK и KL опираются равные углы, поэтому $AK = KL$. Значит, прямоугольные треугольники KHA и KCL равны по катету и гипотенузе, откуда $HA = CL$. Итак, $CB + CL = HB + HA = AB$, что и требовалось доказать.

Комментарий. Выполнено дополнительное построение, ведущих к решению (например, сторона BC продолжена на длину CL, или рассмотрено основание перпендикуляра, опущенного из K на AB) — 1 балл.

10.7. Коэффициенты a, b, c квадратного трёхчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ — натуральные числа, сумма которых равна 2000. Паша может изменить любой коэффициент на 1, заплатив 1 рубль. Докажите, что он может получить квадратный трёхчлен, имеющий хотя бы один целый корень, заплатив не более 1050 рублей.

(*Н. Агаханов*)

Решение. Покажем, что можно из исходного трёхчлена получить новый, имеющий хотя бы один целый корень, изменив коэффициенты a, b, c суммарно даже не более, чем на 1022.

Если коэффициент c не больше 1022, то, сделав его равным нулю, мы получим искомый трёхчлен $f_1(x) = ax^2+bx$, имеющий целый корень $x = 0$.

Пусть теперь $c \geqslant 1023$; тогда из условия $a + b \leqslant 977$. Рассмотрим два последовательных квадрата, между которыми находится c: $m^2 \leqslant c < (m + 1)^2$. Поскольку $c < 2000 < 45^2$, имеем $m \leqslant 44$. Тогда одна из разностей $c-m^2$ и $(m+1)^2-c$ не превосходит $\frac{1}{2}\left((m+1)^2-m^2\right) = \frac{1}{2}\,(2m+1)$, то есть она не больше $m \leqslant 44$. Итак, найдётся натуральное k, для которого $|c-k^2| \leqslant 44$. Заменив теперь a на -1, b на 0, а c на k^2, мы изменим коэффициенты суммарно не более, чем на $(a+b+1)+|c-k^2| \leqslant 978+44 = 1022$, и получим трёхчлен $f_2(x) = -x^2 + k^2$, имеющий целый корень $x = k$.

Комментарий. Отмечено, что при «не очень большом» значении c можно получить многочлен, имеющий корень, заменив c на ноль — 1 балл.

10.8. Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов? (*Д. Храмцов*)

Ответ. $k = 2n$.

Первое решение. Сначала покажем, как покрасить клетки в $2n - 1$ цветов так, чтобы не было ни одной четверки клеток разных цветов, лежащих на пересечении двух горизонталей и двух вертикалей.

Занумеруем горизонтальные ряды сверху вниз чётными числами $0, 2, 4, \ldots, 2n-2$, а вертикальные ряды слева направо нечетными числами $1, 3, \ldots, 2n-1$. Покрасим последовательно 0-й ряд в цвет 0, 1-й ряд — в цвет 1, ..., $(2n-1)$-й ряд — в цвет $2n-1$. При этом при покраске очередного ряда мы перекрашиваем все клетки, которые были покрашены ранее. В конечной раскраске присутствуют $2n-1$ цветов (цвета 0 не останется).

Убедимся, что она удовлетворяет условию. Рассмотрим четыре клетки на пересечении двух горизонталей и двух вертикалей. Один из этих четырёх рядов (вертикалей или горизонталей) был покрашен последним; тогда две его клетки останутся окрашенными в этот цвет и, следовательно, будут одноцветными.

Осталось доказать, что при $k \geqslant 2n$ требуемая четвёрка обязательно найдётся. Рассмотрим раскраску клеток в k или более цветов. Переформулируем задачу следующим образом. Рассмотрим *двудольный граф*, вершины которого соответствуют горизонталям и вертикалям доски (всего $2n$ вершин). Если клетка на пересечении некоторых горизонтали и вертикали покрашена в цвет c, то соединим вершины, соответствующие этим горизонтали и вертикали, ребром цвета c. *Разноцветным циклом* будем называть цикл, в котором нет двух рёбер одного цвета. Нам требуется доказать, что в построенном графе найдется разноцветный цикл из 4 рёбер.

1. Докажем, что найдется хотя бы один разноцветный цикл (возможно, более, чем из 4 рёбер). Выберем по одному ребру каждого цвета — всего не менее $2n$ рёбер попарно разных цветов. Остальные рёбра временно сотрем. В полученном графе количество рёбер не меньше количества вершин; как известно, в таком графе найдется цикл*.

*Это можно доказать следующим образом. Если в графе есть вершина, из которой выходит ровно одно ребро, то можно удалить её вместе с этим ребром и перейти к графу с меньшим числом вершин. Пусть из любой вершины выходит не менее двух ребёр. Тогда можно выйти из одной вершины

2. Теперь найдем в исходном графе кратчайший разноцветный цикл. Пусть это цикл $a_1b_1a_2b_2\ldots a_sb_sa_1$ из $2s$ ребер, где a_i — вершины, соответствующие горизонталям доски, а b_j — вершины, соответствующие вертикалям. Докажем, что этот цикл состоит из 4 ребер, то есть $s = 2$. Пусть напротив, $s > 2$. Рассмотрим ребро b_2a_1. Если его цвет отличен от цвета каждого из ребер a_1b_1, b_1a_2 и a_2b_2, то $a_1b_1a_2b_2a_1$ — разноцветный цикл из 4 ребер; противоречие. Иначе цвет ребра b_2a_1 отличен от цвета каждого из ребер b_2a_3, a_3b_3, $\ldots$, a_kb_k, b_ka_1, тем самым цикл $a_1b_2a_3b_3\ldots a_kb_ka_1$ из $2k-2$ ребер является разноцветным; противоречие.

Второе решение. Сначала мы предъявим пример покраски клеток в $2n-1$ цветов так, чтобы не было ни одной требуемой разноцветной четверки клеток. Покрасим все клетки первой горизонтали H и первой вертикали V в $2n-1$ различный цвет, причём клетку на их пересечении покрасим в цвет c; затем покрасим все оставшиеся клетки также в цвет c. Тогда нетрудно понять, что из четырёх клеток на пересечении любых двух столбцов и двух строк максимум две будут иметь цвет, отличный от c. Значит, требуемой четвёрки клеток не найдётся.

Осталось доказать, что при $k \geqslant 2n$ требуемые четыре клетки всегда найдутся. Мы докажем более общее утверждение: *если клетки прямоугольника $m \times n$ окрашены в $k \geqslant m + n$ цветов, причём все цвета присутствуют, то найдутся 4 разноцветных клетки на пересечении двух строк и двух столбцов.*

Индукция по $m+n$. Заметим сразу, что при $m = 1$ утверждение верно, ибо раскрасок n клеток в $n+1$ цвет не существует; в частности, это доказывает базу индукции при $m+n = 2$. Предположим теперь, что $m, n \geqslant 2$, и совершим переход индукции.

Рассмотрим произвольную раскраску клеток прямоугольника $m \times n$ в k цветов. Назовём цвет c *уникальным* для столбца V, если цвет c встречается только в столбце V; аналогично определим цвет, уникальный для строки. Пусть существует столбец, для которого есть не более одного уникального цвета. Тогда вы-

по ребру и далее двигаться по ребрам, каждый раз выходя из вершины по еще не пройденному ребру. Рано или поздно мы придём в вершину, в которой уже были, то есть получим цикл.

бросим его; в оставшемся прямоугольнике будет встречаться не менее $k-1 \geqslant m+n-1$ цветов, значит, по предположению индукции в нём найдётся нужная четвёрка клеток.

Итак, осталось разобрать случай, когда в каждом столбце (и, аналогично, в каждой строке) хотя бы по два уникальных цвета. Рассмотрим любой столбец V_1; пусть в нём два уникальных цвета p и q, и какие-то клетки этих цветов стоят в строках H_1 и H_2 соответственно. В H_1 есть два уникальных цвета; один из них отличен от p. Пусть этот цвет — r, и в H_1 клетка этого цвета стоит в столбце $V_2 \neq V_1$. Тогда построенные два столбца и две строки — требуемые. Действительно, на их пересечении в V_1 стоят два разных цвета, уникальных для V_1; значит, они не встречаются в V_2. Цвет $r \neq p$ уникален для H_1, значит, он не встречается в H_2. Итого, в нашем пересечении есть различные цвета p, q, r, а также клетка цвета, отличного от них. Это и требовалось.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Приведён пример покраски в $2n-1$ цветов, в который нет четырех клеток разных цветов на пересечении двух строк и двух столбцов — 2 балла.

Доказано, что для любой покраски в $2n$ цветов найдутся четыре клетки разных цветов на пересечении двух строк и двух столбцов — 5 баллов.

За использование без доказательства утверждения о том, что в графе с t вершинами и не менее, чем t ребрами, есть цикл, баллы не снижаются.

11 класс

11.5. Квадратный трёхчлен $f(x)$ имеет два различных корня. Оказалось, что для любых чисел a и b верно неравенство $f(a^2+b^2) \geqslant$ $\geqslant f(2ab)$. Докажите, что хотя бы один из корней этого трёхчлена — отрицательный. *(А. Храбров)*

Первое решение. Подставим в условие $b = 0$ и получим, что $f(a^2) \geqslant f(0)$ при всех a. Следовательно, $f(t) \geqslant f(0)$ при любом положительном t. Из этого и свойств графика квадратичной функции следует, в частности, что ветви параболы направлены вверх.

Предположим, что оба корня трёхчлена неотрицательны. Тогда вершина параболы имеет положительную абсциссу, назовём ее t_0. Но трёхчлен в точке t_0 принимает единственное минимальное значение, то есть $f(0) > f(t_0)$. Противоречие.

Второе решение. Предположим, что оба корня трёхчлена неотрицательны. Тогда вершина параболы имеет положительную абсциссу, назовем ее t_0.

Пусть ветви параболы направлены вверх. Тогда наименьшее значение трёхчлена равно $f(t_0)$. Подставим в условие $b = -a$ и получим, что $f(2a^2) \geqslant f(-2a^2)$ при всех a. Следовательно, $f(t) \geqslant f(-t)$ при любом положительном t; в частности, $f(t_0) \geqslant$ $\geqslant f(-t_0)$, что невозможно.

Пусть ветви параболы направлены вниз. Тогда наибольшее значение трёхчлена равно $f(t_0)$. Подставим в условие $b = 2a$ и получим, что $f(5a^2) \geqslant f(4a^2)$ при всех a. Следовательно, $f(5t/4) \geqslant f(t)$ при любом положительном t; в частности, $f(5t_0/4) \geqslant f(t_0)$, что невозможно.

В обоих случаях мы пришли к противоречию. Значит наше предположение неверно.

Третье решение. Заметим, что для любых чисел $0 \leqslant p \leqslant$ $\leqslant q$ можно подобрать такие неотрицательные числа a и b, что $p = 2ab$ и $q = a^2 + b^2$. Действительно, достаточно взять $a =$ $= \frac{1}{2}\left(\sqrt{p+q} + \sqrt{q-p}\right)$ и $b = \frac{1}{2}\left(\sqrt{p+q} - \sqrt{q-p}\right)$.

Следовательно, для любых чисел $0 \leqslant p \leqslant q$ имеем неравенство $f(p) \leqslant f(q)$. Таким образом, на положительной полуоси трёхчлен возрастает. Поэтому ветви его графика направлены вверх. Но тогда он не может иметь два неотрицательных корня, поскольку это противоречит возрастанию.

Четвёртое решение. Пусть $f(x) = kx^2+\ell x+m$. Подставим в условие $b = -a$. Тогда

$$4ka^4 + 2\ell a^2 + m = f(2a^2) = f(a^2 + (-a)^2) \geqslant f(2a\cdot(-a)) = \\ = f(-2a^2) = 4ka^4 - 2\ell a^2 + m.$$

Поэтому $4\ell a^2 \geqslant 0$ при любом a. Следовательно, $\ell \geqslant 0$.

Если при этом $k > 0$, то сумма корней равна $-\ell/k \leqslant 0$ и, значит, у трёхчлена есть отрицательный корень. Если же $k < 0$, то подставим в условие $b = 0$ и получим, что $ka^4 + \ell a^2 + m = f(a^2) \geqslant f(0) = m$. Следовательно, $a^2(ka^2 + \ell) = ka^4 + \ell a^2 \geqslant 0$ при всех a. Но это невозможно при $a > \sqrt{-\ell/k}$.

Комментарий. Доказано, что у $f(x)$ есть неположительный корень — 4 балла.

В решении пропущен существенный случай (например, когда ветви параболы направлены вниз) — не более 2 баллов.

11.6. Есть полусферическая ваза, закрытая плоской крышкой. В вазе лежат четыре одинаковых апельсина, касаясь вазы, и один грейпфрут, касающийся всех четырёх апельсинов. Верно ли, что все четыре точки касания грейпфрута с апельсинами обязательно лежат в одной плоскости? (Все фрукты являются шарами.)

(*Л. Емельянов*)

Ответ. Верно.

Решение. Обозначим центры вазы, грейпфрута и апельсинов через V, G и A_1, A_2, A_3, A_4 соответственно. Заметим, что все эти шесть точек различны, так как все фрукты находятся под крышкой. Пусть соответствующие апельсины касаются грейпфрута в точках K_1, K_2, K_3, K_4, а вазы — в точках P_1, P_2, P_3, P_4. Обозначим радиусы вазы, грейпфрута и апельсина через v, g и a соответственно.

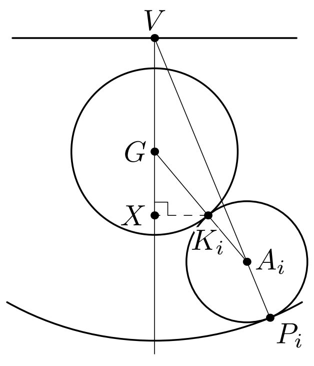


Рис. 5

Рассмотрим треугольники VGA_i. В них сторона VG — общая; кроме того, $VA_i = VP_i - A_iP_i = v - a$ и $GA_i = GK_i +$

$+ K_iA_i = g + a$. Значит, все эти треугольники равны по трём сторонам. Поскольку $GK_i = g$ и $K_iA_i = a$, точки K_i соответствуют друг другу в этих треугольниках. Тогда перпендикуляры из них на общую сторону VG падают в одну и ту же точку X. Поэтому все точки K_i лежат в плоскости, проходящей через X перпендикулярно VG.

Замечание. Условие наличия крышки у вазы существенно. Если крышки нет, а центр грейпфрута совпадает с центром вазы, то центры апельсинов могут находиться в любых точках сферы с центром в G и радиусом $g + a$, и точки касания не обязаны находиться в одной плоскости. Таким образом, любое правильное решение должно использовать тот факт, что центры V и G различны.

Комментарий. В решении используется, но не обосновывается единственность расположения апельсина по отношению к грейпфруту и вазе (с точностью до поворота вокруг прямой, соединяющей центы грейпфрута и вазы) — не более 4 баллов.

11.7. По кругу расставлено 300 положительных чисел. Могло ли случиться так, что каждое из этих чисел, кроме одного, равно разности своих соседей? (*С. Берлов*)

Ответ. Не могло.

Решение. Предположим, что требуемая расстановка существует. Ясно, что наибольшее из чисел не может равняться разности соседей; значит, каждое из остальных чисел равно разности соседей. В частности, наибольшее число встречается ровно один раз; обозначим его через m.

Пусть d — одно из наименьших чисел в круге. Рассмотрим любую из двух дуг между d и m; пусть на ней стоят подряд числа $d = a_0, a_1, \ldots, a_k = m$. Докажем индукцией по $i = 0, 1, \ldots, k - 1$, что $a_{i+1} \geqslant a_i$. В базовом случае $i = 0$ утверждение верно, ибо d — наименьшее число. Для перехода от $i - 1$ к i предположим, что $i < k$ и $a_{i-1} \leqslant a_i$. Тогда равенство $a_i = a_{i-1} - a_{i+1}$ невозможно, ибо $a_{i+1} > 0$, и поэтому $a_i = a_{i+1} - a_{i-1}$. Значит, $a_{i+1} > a_i$, что и доказывает переход индукции. Мы заодно показали, что $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$ при всех $i = 1, \ldots, k - 1$.

Аналогично, если на другой дуге между d и m стоят подряд числа $d = b_0, b_1, \ldots, b_\ell = m$, то $b_0 \leqslant b_1 \leqslant \ldots \leqslant b_\ell$ и $b_{i+1} = b_i + b_{i-1}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, \ell - 1$. Наконец, для числа $a_0 = b_0 = d$ условие задачи также должно выполняться, так что $d = |a_1 - b_1|$. Без ограничения общности можно считать, что $d = b_1 - a_1$; тогда $a_2 = a_0 + a_1 = b_1 > a_1$.

Продолжим теперь последовательности $a_0, a_1, \ldots$ и $b_0, b_1, \ldots$ согласно формулам $a_{i+1} = a_i + a_{i-1}$ и $b_{i+1} = b_i + b_{i-1}$. Докажем индукцией по $i = 1, 2, \ldots$, что $a_i < b_i \leqslant a_{i+1}$. При $i = 1$ это уже доказано выше. При $i = 2$ из соотношений $b_0 = a_0 \leqslant a_1 < b_1 = a_2$ получаем $a_2 = a_1 + a_0 < b_1 + b_0 = b_2 \leqslant a_2 + a_1 = a_3$. Для перехода индукции предположим теперь, что $i \geqslant 3$, и утверждение уже доказано для меньших значений I. По предположению индукции, имеем $a_{i-2} < b_{i-2} \leqslant a_{i-1} < b_{i-1} \leqslant a_i$, откуда $a_i = a_{i-1} + a_{i-2} < b_{i-1} + b_{i-2} = b_i \leqslant a_i + a_{i-1} = a_{i+1}$, что и требовалось.

Итак, мы получили, что $a_0 = b_0 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \ldots$. Значит, равенство $b_\ell = a_k$ возможно лишь при $k = \ell + 1$; но тогда общее количество чисел в круге равно $k + \ell = 2\ell + 1$, что не может равняться 300. Противоречие.

Замечание. Если число 300 заменить на любое нечётное число, то требуемая конфигурация будет существовать (в ней два равных минимальных числа будут стоять рядом). Таким образом, в любом верном решении должен использоваться тот факт, что 300 — чётно (в приведённом решении он используется в последнем абзаце, чтобы исключить случай $k = \ell + 1$).

Условие положительности чисел также важно, иначе бы подошёл пример $0, 0, 0, \ldots$ или $0, 1, 1, 0, 1, 1, \ldots, 0, 1, 1$.

Комментарий. Верный ответ без обоснования — 0 баллов.

Доказано, что последовательность чисел на каждой из двух дуг между наименьшим и наибольшим числом удовлетворяет рекуррентному уравнению $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ — 2 балла.

11.8. Петя хочет выписать все возможные последовательности из 100 натуральных чисел, в каждой из которых хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Сколько последовательностей ему придётся выписать? (*И. Богданов*)

Ответ. $5^{100} - 3^{100}$.

Первое решение. Обозначим $n = 100$. Назовём последовательность из n натуральных чисел, любые два соседних члена которой различаются не больше, чем на 2, *интересной.* Каждой интересной последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n$ сопоставим *разностную* последовательность $b_i = a_{i+1} - a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$. Все члены разностной последовательности равны 0, ± 1 или ± 2, так что количество всевозможных разностных последовательностей равно 5^{n-1}.

Посчитаем сначала количество S всех интересных последовательностей, минимальный член которых не превосходит 5. Рассмотрим произвольную разностную последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_{99}$. Любые две интересные последовательности, соответствующие ей, отличаются прибавлением одного и того же числа к каждому члену. Значит, среди них ровно по одной последовательности с минимальным членом, равным 1, 2, 3, 4 или 5. Таким образом, $S = 5 \cdot 5^{n-1} = 5^n$.

В S учтены все последовательности, выписываемые Петей, и несколько *лишних* — тех, в которых не встречается ни 4, ни 5. Ясно, что, если в интересной последовательности встречаются как числа, большие 5, так и меньшие 4, то 4 или 5 также встретится. Но минимальный член каждой лишней последовательности не больше 3, значит, и все их члены не превосходят 3. Итак, все лишние последовательности состоят из чисел 1, 2 и 3. С другой стороны, каждая последовательность из чисел 1, 2 и 3 является интересной, и, стало быть, лишней.

Итого, лишних последовательностей ровно 3^n, а значит, искомое количество равно $S - 3^n = 5^n - 3^n$.

Второе решение. Назовём *хорошей* последовательность из n натуральных чисел, в которой хотя бы раз встречается число 4 или 5, а любые два соседних члена различаются не больше, чем на 2. Обозначим через S_n количество хороших последовательностей длины n. Мы докажем индукцией по n, что $S_n = 5^n - 3^n$. База индукции при $n = 1$ очевидна.

Сделаем переход от n к $n+1$. Рассмотрим произвольную n-членную хорошую последовательность; пусть она оканчивается числом k. Тогда к ней можно приписать любое число от $k-2$ до $k+2$; полученная последовательность будет хорошей, если приписываемое число натуральное. Если же оно неположительно (то есть равно 0 или -1), то после приписывания прибавим ко всем числам последовательности по 5. Полученная последовательность будет оканчиваться числом 4 или 5, а значит, будет хорошей.

Заметим, что все полученные последовательности — разные. Для последовательностей, полученных без прибавления 5, это очевидно; при этом таким образом получаются ровно все хорошие последовательности, среди первых n членов которых есть 4 или 5. Последовательности же, полученные прибавлением 5, тоже попарно различны; при этом это — ровно все хорошие последовательности, первые n членов которых больше 5, и при этом среди них встречается 9 или 10. В частности, эти последовательности отличны от описанных ранее. Итого, мы пока что построили $5S_n$ хороших $(n+1)$-членных последовательностей.

Осталось подсчитать число ещё неучтённых последовательностей. В каждой неучтённой последовательности среди первых n членов нет чисел 4, 5, 9 и 10, а последний член равен 4 или 5. Значит, либо первые n её членов — единицы, двойки и тройки, либо все они — шестёрки, семёрки или восьмёрки. Посчитаем количество первых; количество вторых считается аналогично.

Рассмотрим любую последовательность из n единиц, двоек и троек (её соседние члены автоматически отличаются максимум на 2). Если она оканчивается числом 3, то к ней можно приписать 4 или 5, получив неучтённую последовательность. Если она оканчивается числом 2, то можно приписать лишь 4; если же её последнее число — 1, то хорошую последовательность из неё получить нельзя. Значит, количество полученных неучтённых последовательностей равно $2\cdot 3^{n-1}+3^{n-1}=3^n$ (и ещё столько же получаются из последовательностей с числами 6, 7 и 8).

Итого, мы получаем $S_{n+1}=5S_n+2\cdot 3^n=5(5^n-3^n)+2\cdot 3^n = = 5^{n+1}-3^{n+1}$, что и требовалось.

Комментарий. Только ответ — 1 балл.

Если задача решается для последовательностей из n чисел, но разобраны лишь случаи небольших значений n (скажем, $n \leqslant 6$) — 0 баллов.

При подходе, аналогичном первому решению, неверно подсчитано количество лишних последовательностей — снять 3 балла.

При индуктивном подходе, аналогичном второму решению, неверно произведён учёт последовательностей, в которых числа 4 и 5 стоят только на последнем месте — ставится не более 3 баллов.

VII математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера

Региональный этап. Второй день

8.5. На столе лежит палочка длиной 10 см. Петя ломает её на две части и кладёт обе получившиеся палочки на стол. С одной из лежащих на столе палочек Вася проделывает ту же операцию, потом то же делает Петя и т.д., по очереди. Петя хочет, чтобы после 18 разломов все получившиеся палочки были короче 1 см. Вася хочет помешать Пете. Кто из них имеет возможность добиться своей цели независимо от действий соперника?

(*И. Рубанов, С. Берлов*)

Ответ. Вася.

Решение. Отметим 9 точек, делящих палочку на части длиной 1 см. Васе достаточно играть так, чтобы на все эти точки пришлись разломы. Так как у него 9 ходов, он сможет это сделать. В итоге после 18 разломов получится 10 палочек длиной 1 см, некоторые из которых разломаны на более мелкие части. Так как разломов, не приходящихся на отмеченные точки, всего 9, хотя бы одна из сантиметровых палочек останется целой, и Петя не добьётся своей цели.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведена верная стратегия Васи без обоснования или с неверным обоснованием — 3 балла.

8.6. После просмотра фильма зрители по очереди оценивали фильм целым числом баллов от 0 до 10. В каждый момент времени рейтинг фильма вычислялся как сумма всех выставленных оценок, делённая на их количество. В некоторый момент времени T рейтинг оказался целым числом, а затем с каждым новым проголосовавшим зрителем он уменьшался на единицу. Какое наибольшее количество зрителей могло проголосовать после момента T? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. 5.

Решение. Рассмотрим некоторый момент, когда рейтинг уменьшился на 1. Пусть перед этим проголосовало n человек, и рейтинг был целым числом x. Значит, сумма баллов стала равна nx. Пусть следующий зритель выставил y баллов. Тогда сумма баллов стала равна $nx+y=(n+1)(x-1)$, откуда $y=x-n-1$. Наибольшее возможное значение x равно 10, а наименьшее возможное значение n равно 1; значит, наибольшее значение y (на первом таком шаге) равно 8.

С каждым следующим шагом значение x уменьшается на 1, а значение n увеличивается на 1. Следовательно, на втором шаге значение y не превосходит 6, на третьем — 4, и т.д. Поскольку любая оценка не меньше 0, число шагов не превосходит 5.

Осталось показать, что пять шагов возможны. Пусть рейтинг в момент T равен 10 (при одном проголосовавшем), затем второй зритель выставляет 8 баллов, третий — 6, четвёртый — 4, пятый — 2, а шестой — 0. Тогда рейтинг последовательно принимает значения 9, 8, 7, 6 и 5.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только приведен пример, в котором проголосовало 5 зрителей — 2 балла.

Доказано с полным обоснованием, что более 5 зрителей проголосовать не могло (но пример отсутствует или неверен) — 4 балла.

8.7. В трапеции $ABCD$, где $AD \parallel BC$, угол B равен сумме углов A и D. На продолжении стороны CD за вершину D отложен отрезок $DK=BC$. Докажите, что $AK=BK$. (*Б. Обухов*)

Решение. Отложим на луче DA отрезок $DE=BC$. Тогда четырёхугольник $DCBE$ — параллелограмм, поэтому $\angle CBE = \angle CDE$. Используя условие, получаем $\angle ABE = \angle ABC - \angle CBE = \angle ABC - \angle CDE = \angle BAE$; значит, треугольник ABE равнобедренный, $AE=BE$.

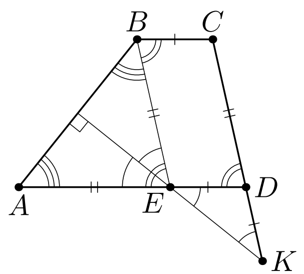
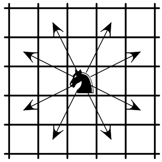


Рис. 1

Далее, поскольку $ED=BC=KD$, получаем $\angle KED = \angle EKD = \angle CDE/2$. Так как $\angle AEB = \angle CDE$, прямая KE является биссектрисой угла AEB и, тем самым, — серединным перпендикуляром к основанию AB равнобедренного треугольника AEB. Поэтому точка K равноудалена от концов отрезка AB, что и требовалось доказать.

8.8. На шахматной доске размером 20×20 расставлены 220 коней, которые бьют все свободные клетки. Докажите, что можно убрать 20 коней таким образом, чтобы оставшиеся кони били все свободные клетки. Напомним, что конь ходит буквой «Г», как на рисунке справа.



(*С. Берлов*)

Решение. Будем убирать коней с доски по одному следующим образом. Если на очередном шаге можно убрать какого-то коня так, что оставшиеся будут бить все свободные поля, сделаем это. Если после некоторого шага останется 200 коней, мы получим требуемое.

Предположим, что в некоторый момент ни одного коня с сохранением нужного условия убрать нельзя. Разобьём клетки доски на пары, соединённые ходом коня (это можно сделать, например, как на рис. 2). Назовём пару *полной*, если в ней стоят два коня, и *пустой*, если в ней нет коней; пусть на доске f полных и e пустых пар.

6	5	8	7
2	1	4	3
5	6	7	8
1	2	3	4

Рис. 2

Рассмотрим любого коня R, стоящего в полной паре. Если его убрать, его клетка окажется побитой парным к нему; значит, останется непобитой некоторая другая клетка C. Ясно, что она находится в пустой паре и бьётся только конём R; сопоставим клетку C коню R. Ясно, что разным коням сопоставлены разные клетки; поэтому общее количество сопоставленных клеток (оно не больше $2e$) равно $2f$, то есть $e \geqslant f$. Но общее количество коней равно $2f + (200 - e - f) = 200 + (f - e) \leqslant 200$. Значит, в момент, когда ни одного коня убрать нельзя, мы уже добились требуемого.

Комментарий. Идея сопоставить коню, бьющему клетки, не побитые другими конями, одну из этих клеток, при отсутствии дальнейшего содержательного продвижения — 1 балл.

Без доказательства существенно использовано существование на доске 20×20 гамильтонова обхода конём (т. е. замкнутого маршрута коня, проходящего через каждую клетку ровно один раз) — не выше 3 баллов.