Материалы для проведения регионального этапа

XLI ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2014–2015 учебный год

Первый день

2–3 февраля 2015 г.

Москва, 2014

Сборник содержит материалы для проведения III этапа XLI Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Федеральной методической Комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Д. А. Белов, И. И. Богданов, А. И. Голованов, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, Л. А. Емельянов, Г. М. Иванов, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, К. А. Кноп, А. Н. Магазинов, А. Д. Матушкин, А. В. Пастор, О. К. Подлипский, А. А. Полянский, И. С. Рубанов, Р. С. Садыков, В. А. Сендеров, М. Б. Скопенков, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, А. Г. Якубов.

В скобках после каждой задачи указана фамилия ее автора.

Рецензент: д. ф.-м. н. Р. Н. Карасёв.

Компьютерный макет: И. И. Богданов.

Порядок проведения, методика и система оценивания (проверки) регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике 2014–2015 учебного года.

Олимпиада проводится в два дня (тура) — 2 и 3 февраля 2015 года. Задания каждого тура содержат по 4 задачи для каждого класса. Каждый тур олимпиады длится 4 часа.

В связи с тем, что во всех субъектах Российской Федерации региональный этап проводится по одним и тем же заданиям, подготовленным центральной предметно-методической комиссией, в целях предотвращения преждевременного доступа к текстам заданий со стороны участников олимпиады, а также их учителей и наставников, время начала туров в установленные даты в каждом субъекте РФ должно определяться в соответствии с рекомендацией Министерства образования и науки РФ. Именно, каждый тур может начинаться только в интервале от 5.00 до 9.00 **по московскому времени**.

Организаторы регионального этапа в том или ином субъекте РФ могут сами установить время начала каждого тура, но оно не должно выходить за пределы указанного интервала.

Рекомендуется итоговую проверку, разбор/показ, апелляции планировать в отдельный день.

Решение каждой задачи оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Максимальное количество баллов, которое может получить участник, равно 56 (28 — I тур, 28 — II тур).

Задания математических олимпиад являются творческими, допускают несколько различных вариантов решений. Кроме того, необходимо оценивать частичные продвижения в задачах (например, разбор важного случая, доказательство вспомогательного утверждения, нахождение примера и т.п.). Наконец, возможны логические и арифметические ошибки в решениях. Окончательные баллы по задаче должны учитывать всё вышеперечисленное.

Ниже приведена стандартная методика оценивания решений.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6–7	Верное решение, но имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение.
5–6	Решение в целом верное. Однако оно содержит ошибки, либо пропущены случаи, не влияющие на логику рассуждений.
3–4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2–3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0–1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения.
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Важно отметить, что любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого в данной методической разработке или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов.

Ниже приведены ответы и решения задач олимпиады. В комментариях к задачам указаны критерии оценивания (в баллах) некоторых предполагаемых ошибок и частичных продвижений. Заметим, что работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены дополнительно.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.1. За круглым столом сидят 2015 человек, каждый из них — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Им раздали по одной карточке, на каждой карточке написано по числу; при этом все числа на карточках различны. Посмотрев на карточки соседей, каждый из сидящих за столом сказал: «Мое число больше, чем у каждого из двух моих соседей». После этого k из сидящих сказали: «Мое число меньше, чем у каждого из двух моих соседей». При каком наибольшем k это могло случиться? (*О. Подлипский*)

Ответ. 2013.

Решение. Пусть A и B — люди, которым достались карточки с самым большим и самым маленьким числами, соответственно. Поскольку они оба сказали первую фразу, A — рыцарь, а B — лжец. Но, если бы они сказали вторую фразу, то A солгал бы, а B сказал бы правду; это невозможно. Значит, A и B сказать вторую фразу не могут, и $k \leqslant 2013$.

Покажем, что ситуация, когда оставшиеся 2013 человек смогут сказать вторую фразу, возможна. Пусть сидящим за столом достались (по часовой стрелке) карточки с числами $1, 2, 3, \ldots,$ 2015; при этом карточка с числом 2015 досталась рыцарю, а остальные — лжецам. Тогда первую фразу могут сказать все, а вторую — все, кроме людей с карточками 1 и 2015.

Замечание. Существуют и другие примеры распределения карточек, при которых 2013 человек могут сказать вторую фразу.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример рассадки людей, при которой k может быть равно 2013 — 3 балла.

Доказано только, что $k \leqslant 2013$ — 4 балла.

Доказано только, что $k \leqslant 2014$ — 1 балл.

Утверждается, что люди с наибольшим и наименьшим числом не могут сказать вторую фразу, но это утверждение никак не обосновано — снимается 1 балл.

9.2. Назовём натуральное число *интересным*, если сумма его цифр — простое число. Какое наибольшее количество интересных чисел может быть среди пяти подряд идущих натуральных чисел? (*О. Подлипский*)

Ответ. 4.

Решение. Среди пяти подряд идущих натуральных чисел могут найтись 4 интересных числа. Например, подойдут числа 199, 200, 201, 202, 203 (с суммами цифр **19**, **2**, **3**, 4 и **5**).

Докажем теперь, что все 5 чисел не могут оказаться интересными. Среди наших пяти чисел есть три, лежащих в одном десятке. Тогда их суммы цифр — последовательные числа; значит, все они не могут одновременно быть простыми.

Замечание 1. Существуют и другие примеры пяти последовательных чисел, четыре из которых интересны. Более того, число, делящееся на 10, также может стоять на другом месте, как, например, в пятёрке 197, 198, 199, 200, 201. Однако в любом таком примере суммы цифр двух из чисел пятёрки должны быть равны 2 и 3.

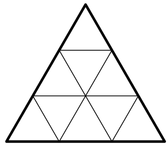
Замечание 2. Доказать, что пять подряд идущих чисел не могут быть интересными, можно и по-другому. Среди наших чисел по крайней мере два имеют четную сумму цифр (даже если есть переход «через десяток»). Но обе этих суммы не могут равняться 2, поскольку сумму цифр 2 имеют только числа вида $10\ldots010\ldots0$ и $20\ldots0$, а два таких числа не могут встретиться среди 5 подряд идущих натуральных чисел.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Приведён пример пяти чисел подряд, четыре из которых интересны — 3 балла.

Приведён лишь пример пяти последовательных чисел, среди которых меньше 4 интересных — 0 баллов.

Доказано, что не существует пяти интересных чисел подряд — 3 балла.



9.3. Правильный треугольник со стороной 3 разбит на девять треугольных клеток, как показано на рисунке. В этих клетках изначально записаны нули. За один ход можно выбрать два числа, находящиеся в соседних по стороне клетках, и либо прибавить к обоим по единице, либо вычесть из обоих по единице. Петя хочет сделать несколько ходов так, чтобы после этого в клетках оказались записаны в некотором порядке последовательные натуральные числа n, $n+1$, $\ldots$, $n+8$. При каких n он сможет это сделать? (*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. Только при $n = 2$.

Решение. Покажем, что числа $1, 2, \ldots, 9$ получить нельзя. Сумма исходных чисел равна 0, а за каждый ход сумма чисел изменяется на 2. Значит, она всегда чётна, то есть числа $1, 2, \ldots, 9$ с суммой 45 получить нельзя.

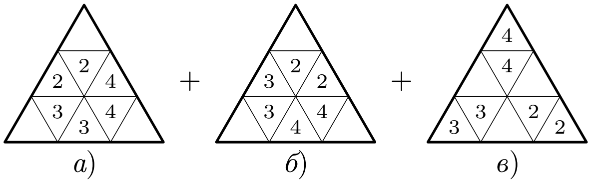


Рис. 1

Набор $2, 3, \ldots, 10$ получить можно. Один из возможных способов представлен на рис. 1*а*)–*в*), где одинаковые числа показывают, к каким двум клеткам и сколько раз применяется операция прибавления единицы. Итоговый результат показан на рис. 1*г*).

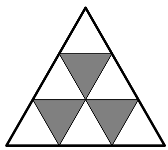


Рис. 2

Покажем, наконец, что при $n > 2$ нельзя получить набор чисел n, $n+1$, $\ldots$, $n+8$. Предположим противное. Раскрасим клетки в шахматном порядке так, как показано на рис. 2. Тогда при каждом ходе одна из выбранных клеток — белая, а другая — чёрная. Значит, суммы чисел в белых и чёрных клетках изменяются на одно и то же число. Так как в начале эти суммы равны, они окажутся равными и в конце. С другой стороны, сумма чисел в чёрных клетках окажется не больше, чем $(n+8)+(n+$

$+ 7) + (n + 6) = 3n + 21$, а сумма чисел в белых — не меньше, чем $n + (n + 1) + \ldots + (n + 5) = 6n + 15$. При $n > 2$ имеем $6n + 15 = (3n + 15) + 3n > 3n + 15 + 6 = 3n + 21$; значит, требуемые суммы равными не будут. Противоречие.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано, как получить числа 2, 3, …, 10 — 2 балла.

Доказано, что при $n \neq 2$ требуемое невозможно — 5 баллов.

Доказано только, что при $n = 1$ (или при всех нечётных n) требуемое невозможно — 2 балла вместо 5.

Доказано только, что при $n \geqslant 3$ требуемое невозможно (то есть упущен или неверно разобран случай $n = 1$) — 4 балла вместо 5.

Если в решении считается (и существенно используется), что единицы только прибавляются, а не вычитаются — за эту часть решения ставится не более 2 баллов.

Баллы за приведённый пример при $n = 2$ и за доказательство невозможности некоторых других случаев складываются.

9.4. В неравнобедренном треугольнике ABC провели биссектрисы угла ABC и угла, смежного с ним. Они пересекли прямую AC в точках B_1 и B_2 соответственно. Из точек B_1 и B_2 провели касательные к окружности, вписанной в треугольник ABC, отличные от прямой AC. Они касаются этой окружности в точках K_1 и K_2 соответственно. Докажите, что точки B, K_1 и K_2 лежат на одной прямой. (*Л. Емельянов*)

Решение. Обозначим через I центр окружности ω, вписанной в треугольник ABC. Пусть D — точка касания ω со стороной AC (см. рис. 3). Так как прямая BB_1 проходит через центр ω, точки D и K_1 симметричны относительно прямой BB_1, то есть BI — биссектриса угла K_1BD. Докажем, что BI также является биссектрисой угла K_2BD; отсюда будет следовать требуемое.

Рассмотрим окружность Γ, построенную на B_2I как на диаметре. Так как внутренняя и внешняя биссектрисы угла треугольника перпендикулярны, а B_2K_2 и B_2D касаются ω, имеем $\angle B_2BI = \angle B_2K_2I = \angle B_2DI = 90^\circ$. Значит, точки I, B, D и K_2 лежат на окружности Γ. Радиусы ID и IK_2 окружности ω равны, поэтому равны и стягиваемые ими дуги окружности Γ;

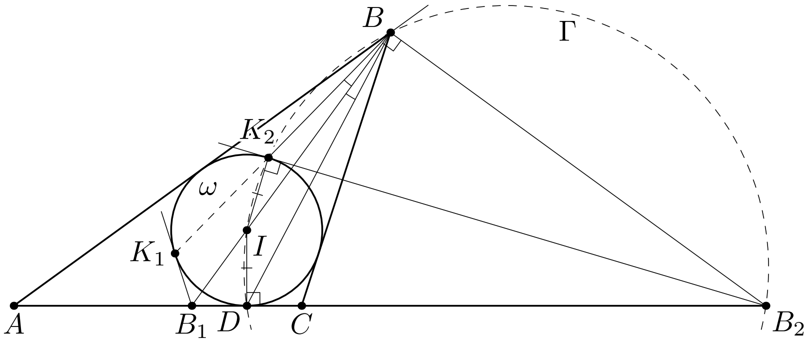


Рис. 3

следовательно, $\angle IBD = \angle IBK_2$, то есть BI — биссектриса угла K_2BD. Это нам и требовалось.

Комментарий. В обозначениях, введённых в решении, доказано, что точки I, K_2, B и D лежат на одной окружности — 3 балла.

10 класс

10.1. Целые числа a, x_1, x_2, ..., x_{13} таковы, что

$$a = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_{13}) = (1 - x_1)(1 - x_2) \dots (1 - x_{13}).$$

Докажите, что $ax_1x_2 \dots x_{13} = 0$. (*В. Сендеров*)

Решение. Если какое-то из чисел x_i равно 0, утверждение задачи очевидно. Если одно из x_i равно ± 1, то $a = 0$, так что утверждение также верно. В противном случае при каждом i число $(1 + x_i)(1 - x_i) = 1 - x_i^2$ отрицательно. С другой стороны, из условия имеем

$$0 \leqslant a^2 = (1+x_1)(1+x_2) \dots (1+x_{13}) \cdot (1-x_1)(1-x_2) \dots (1-x_{13}).$$

Но в правой части стоит отрицательное число (как произведение 13 отрицательных чисел вида $(1 - x_i)(1 + x_i)$). Противоречие.

Замечание 1. В случае, когда все x_i отличны от 0 и ± 1, можно строить рассуждения и по-другому. Например, поскольку числа $1 + x_i$ и $1 - x_i$ имеют разные знаки, среди 26 выражений $(1 - x_1)$, ..., $(1 - x_{13})$, $(1 + x_1)$, ..., $(1 + x_{13})$ нечетное число отрицательных.

Замечание 2. Из условия не следует, что $a = 0$ (даже в случае, если не все x_i — нули). Более того, неверно, что при $a \neq 0$ все ненулевые x_i разбиваются на пары противоположных. Например, если положить $x_1 = -3$, $x_2 = 7$, $x_3 = 9$, $x_4 = 11$ и $x_5 = x_6 = \dots = x_{13} = 0$, то

$$(1-3)(1+7)(1+8)(1+11) = (1+3)(1-7)(1-9)(1-11) = -1920.$$

Комментарий. Верно рассмотрен только случай, когда модуль хотя бы одного из x_i не превосходит единицы — 1 балл.

10.2. На плоскости отметили все вершины правильного n-угольника, а также его центр. Затем нарисовали контур этого n-угольника, и центр соединили со всеми вершинами; в итоге n-угольник разбился на n треугольников. Вася записал в каждую отмеченную точку по числу (среди чисел могут быть равные). В каждый треугольник разбиения он записал в произвольном порядке три числа, стоящих в его вершинах; после этого он стёр числа в отмеченных точках. При каких n по тройкам чисел, записанным в треугольниках, Петя всегда сможет восстановить число в каждой отмеченной точке? (*И. Рубанов*)

Ответ. При нечётных n.

Решение. Пусть $A_1A_2\ldots A_n$ — данный многоугольник, а S — его центр.

Покажем сначала, что, если n чётно, то существуют две различные расстановки, при которых соответствующие тройки будут одинаковыми. Тогда Петя не сможет восстановить исходные числа. В первой расстановке поставим в S число 2, а во все вершины n-угольника — по 1. Во второй расстановке поставим в S число 1, а в вершины n-угольника — единицы и двойки чередующимся образом. Для обеих расстановок все тройки будут «1, 1, 2».

Осталось показать, что при нечётном n Петя сможет восстановить все числа. Отметим, что число из вершины A_i пишется в двух тройках, а число из S — в n тройках. Значит, только число из S будет встречаться во всех тройках нечётное число раз, и Петя сможет его определить. После этого для каждой пары соседних вершин n-угольника он знает, какие два числа написаны в них. Осталось по этим данным восстановить числа в вершинах. Заметим сразу, что если Петя сумеет восстановить, скажем, число в A_1, то затем из пары (A_1, A_2) он восстановит число в A_2, затем — в A_3, и т.д. Итак, ему достаточно восстановить число в одной вершине n-угольника.

Если в какой-то паре (скажем, (A_1, A_2)) два числа равны, то Петя восстановит число в A_1. Пусть такой пары нет, а в вершинах (A_1, A_2) написаны числа a и b. Если в (A_2, A_3) написана не та же пара, то она пересекается с (a, b) по числу, написанному в A_2, и Петя восстановит это число. Итак, он не сможет восстановить число в вершине A_2, только если в (A_2, A_3) записана пара (a, b). Аналогично, в (A_3, A_4) тоже должна быть записана эта же пара, иначе Петя сможет определить число в A_3, и т.д. Итак, Петя не сможет восстановить числа в вершинах n-угольника, только если числа a и b в этих вершинах чередуются; это невозможно, так как n нечётно.

Замечание. При четном n есть и другие примеры расстановок чисел с одинаковыми тройками. Например, в обеих расстановках в S ставится 1, а в вершинах A_i чередуются 1 и 2 так, что в первом способе в вершине A_1 находится число 1, а во втором — число 2.

Комментарий. Только ответ без каких-либо других существенных продвижений — 0 баллов.

При чётном n приведен пример двух разных расстановок чисел с одинаковыми тройками — 2 балла.

Для нечётного n показано с полным обоснованием, как по тройкам чисел на гранях восстановить числа в вершинах — 5 баллов.

При нечётном n показано только, как по тройкам чисел на гранях восстановить число в центре n-угольника — ставится 3 балла из 5 возможных за эту часть решения.

10.3. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Серединный перпендикуляр к отрезку AL пересекает окружность, описанную около треугольника ABC, в точках P и Q. Докажите, что окружность, описанная около треугольника PLQ, касается стороны BC. (*С. Берлов*)

Решение. Заметим, что треугольники PLQ и PAQ симметричны относительно прямой PQ. Через точку A проведем касательную XY к окружности, на которой лежат точки A, B, C, P, Q (см. рис. 4). Для решения задачи достаточно доказать, что прямые XY и BC симметричны относительно прямой PQ. А поскольку точки A и L симметричны относительно прямой PQ, остается установить равенство углов $\angle XAL$ и $\angle BLA$.

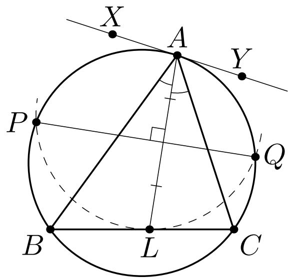


Рис. 4

Используя касание и теорему о внешнем угле треугольника, имеем $\angle XAL = \angle XAB + \angle BAL = \angle ACB + \angle CAL = \angle ACL + \angle CAL = \angle BLA$, что и требовалось.

Комментарий. Задача сведена к доказательству того, что прямые XY и BC симметричны относительно прямой PQ (или эквивалентного утверждения) — 3 балла.

Показано, что прямые BC, PQ и касательная в точке A пересекаются в одной точке либо параллельны — 3 балла.

10.4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab +$

$+\,bc+ca=1$. Докажите, что

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}}\geqslant 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

(*П. Козлов*)

Решение. Заметим, что

$$a+\frac{1}{a}=a+\frac{ab+ac+bc}{a}=a+b+c+\frac{bc}{a}\,.$$

Применяя неравенство о средних для чисел a и bc/a, получаем

$$a+\frac{1}{a}\geqslant b+c+2\sqrt{bc}=(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2;$$

отсюда $\sqrt{a+\frac{1}{a}}\geqslant\sqrt{b}+\sqrt{c}$. Аналогичным образом выводятся неравенства $\sqrt{b+\frac{1}{b}}\geqslant\sqrt{c}+\sqrt{a}$ и $\sqrt{c+\frac{1}{c}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$. Складывая последние три неравенства, получаем требуемый результат.

Комментарий. Задача сведена к доказательству неравенства $\sqrt{a+\frac{1}{a}}\geqslant\sqrt{b}+\sqrt{c}$ (но это неравенство не доказано) — 1 балл.

Доказано только, что левая и правая части неравенства не больше (не меньше) одного и того же выражения — 0 баллов.

11 класс

11.1. Целые числа a, x_1, x_2, …, x_{13} таковы, что

$$a = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{13}).$$

Докажите, что $ax_1x_2\ldots x_{13} = 0$. (*В. Сендеров*)

Решение. Если какое-то из чисел x_i равно 0, утверждение задачи очевидно. Если одно из x_i равно ± 1, то $a = 0$, так что утверждение также верно. В противном случае при каждом i число $(1+x_i)(1-x_i) = 1-x_i^2$ отрицательно. С другой стороны, из условия имеем

$$0 \leqslant a^2 = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{13})\cdot(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{13}).$$

Но в правой части стоит отрицательное число (как произведение 13 отрицательных чисел вида $(1-x_i)(1+x_i)$). Противоречие.

Замечание 1. В случае, когда все x_i отличны от 0 и ± 1, можно строить рассуждения и по-другому. Например, поскольку числа $1+x_i$ и $1-x_i$ имеют разные знаки, среди 26 выражений $(1-x_1)$, …, $(1-x_{13})$, $(1+x_1)$, …, $(1+x_{13})$ нечетное число отрицательных.

Замечание 2. Из условия не следует, что $a = 0$ (даже в случае, если не все x_i — нули). Более того, неверно, что при $a \neq 0$ все ненулевые x_i разбиваются на пары противоположных. Например, если положить $x_1 = -3$, $x_2 = 7$, $x_3 = 9$, $x_4 = 11$ и $x_5 = x_6 = \ldots = x_{13} = 0$, то

$$(1-3)(1+7)(1+8)(1+11) = (1+3)(1-7)(1-9)(1-11) = -1920.$$

Комментарий. Верно рассмотрен только случай, когда модуль хотя бы одного из x_i не превосходит единицы — 1 балл.

11.2. На новогодний вечер пришли несколько супружеских пар, у каждой из которых было от 1 до 10 детей. Дед Мороз выбирал одного ребёнка, одну маму и одного папу из трёх разных семей и катал их в санях. Оказалось, что у него было ровно 3630 способов выбрать нужную тройку людей. Сколько всего могло быть детей на этом вечере? (*С. Волчёнков*)

Ответ. 33.

Решение. Пусть на вечере было p супружеских пар и d детей (из условия, $d \leqslant 10p$). Тогда каждый ребёнок состоял в $(p-1)(p-2)$ тройках: маму можно было выбрать из одной из

$p-1$ супружеских пар, а при зафиксированном выборе мамы папу можно было выбрать из одной из $p-2$ оставшихся пар. Значит, общее количество троек равно $d\cdot(p-1)(p-2)=3630$. Поскольку $d\leqslant 10p$, получаем $3630\leqslant 10p^3$, то есть $p^3\geqslant 363>7^3$. Значит, $p\geqslant 8$.

Далее, число $3630=2\cdot 3\cdot 5\cdot 11^2$ имеет два делителя $p-1$ и $p-2$, отличающиеся на 1. Если один из этих делителей делится на 11, то другой даёт остаток 1 или 10 при делении на 11. Тогда он взаимно прост с 11, а значит, он делит $2\cdot 3\cdot 5=30$ и при этом не меньше 10. Нетрудно видеть, что этим делителем может быть только 10; тогда $p-2=10$, $p-1=11$ и $d=3630/110=33$.

Если же оба числа $p-2$ и $p-1$ не делятся на 11, то число $2\cdot 3\cdot 5=30$ делится на их произведение; это противоречит тому, что $p\geqslant 8$.

Комментарий. Обоснованно получено равенство $d(p-1)(p-2)=3630$ — 4 балла.

11.3. Продолжения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0, B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0, AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний. (*А. Якубов*)

Решение. Лемма. *Пусть A, B, C и D — различные точки на плоскости, причём прямые AC и BD пересекаются в точке E. Тогда $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}=\frac{BE}{DE}$.*

Доказательство. Пусть BH_B и DH_D — высоты в треугольниках ABC и ADC соответственно (см. рис. 5). Тогда $BH_B\parallel DH_D$, поэтому треугольники BH_BE и DH_DE подобны; отсюда $\frac{BH_B}{DH_D}=\frac{BE}{DE}$. С другой стороны, $S_{ABC}=\frac{AC\cdot BH_B}{2}$ и $S_{ADC}=\frac{AC\cdot DH_D}{2}$, откуда $\frac{S_{ABC}}{S_{ADC}}=\frac{AC\cdot BH_B}{AC\cdot DH_D}=\frac{BH_B}{DH_D}=\frac{BE}{DE}$, что и требовалось. $\square$

Перейдем к решению задачи. Обозначим через M точку пересечения медиан $\triangle ABC$. Из леммы следует, что $S_{AMB}=S_{AMC}$; из условия теперь получаем, что $\frac{S_{AMB}}{S_{AC_0B}}=\frac{S_{AMC}}{S_{AB_0C}}$. Опять применяя лемму, получаем $\frac{MC_1}{C_1C_0}=\frac{MB_1}{B_1B_0}$, откуда $C_1B_1\parallel C_0B_0\parallel BC$. Поскольку четырёхугольник BCB_0C_0 впи-

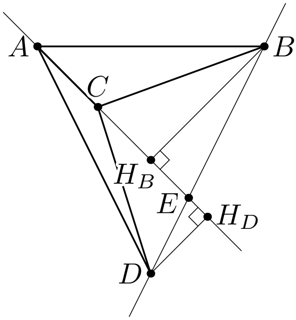


Рис. 5

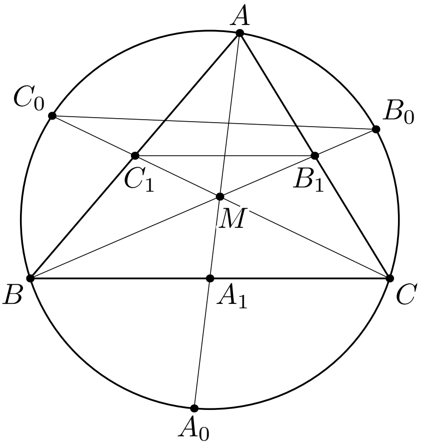


Рис. 6

сан, он является равнобокой трапецией или прямоугольником; в любом случае, $BM = MC$, то есть треугольник BMC — равнобедренный, и его медиана MA_1 является и высотой. Значит, и в треугольнике ABC медиана AA_1 является высотой, то есть $AB = AC$. Равенство $AB = BC$ доказывается аналогично.

Комментарий. Доказано, что $CB \parallel C_0B_0$ (или аналогичное утверждение для аналогичных точек) — 4 балла.

11.4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ca = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geqslant 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}).$$

(*П. Козлов*)

Решение. Заметим, что

$$a + \frac{1}{a} = a + \frac{ab + ac + bc}{a} = a + b + c + \frac{bc}{a}.$$

Применяя неравенство о средних для чисел a и bc/a, получаем

$$a + \frac{1}{a} \geqslant b + c + 2\sqrt{bc} = (\sqrt{b} + \sqrt{c})^2;$$

отсюда $\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geqslant \sqrt{b} + \sqrt{c}$. Аналогичным образом выводятся неравенства $\sqrt{b + \frac{1}{b}} \geqslant \sqrt{c} + \sqrt{a}$ и $\sqrt{c + \frac{1}{c}} \geqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Складывая последние три неравенства, получаем требуемый результат.

Комментарий. Задача сведена к доказательству неравенства $\sqrt{a+\frac{1}{a}} \geqslant \sqrt{b}+\sqrt{c}$ (но это неравенство не доказано) — 1 балл.

Доказано только, что левая и правая части неравенства не больше (не меньше) одного и того же выражения — 0 баллов.

VII математическая олимпиада имени Леонарда Эйлера

Региональный этап. Первый день

8.1. На доске написаны четыре числа, ни одно из которых не равно 0. Если каждое из них умножить на сумму трёх остальных, получатся четыре одинаковых результата. Докажите, что квадраты записанных на доске чисел равны. (*И. Рубанов*)

Решение. Пусть записаны числа a, b, c и d. По условию $a(b+c+d) = b(a+c+d)$, откуда $(a-b)(c+d) = 0$. Аналогично, из равенства $c(a+b+d) = d(a+b+c)$ получаем $(c-d)(a+b) = 0$. Поскольку или $c+d$, или $c-d$ не равно 0, то либо $a = b$, либо $a = -b$. В обоих случаях квадраты чисел a и b равны, откуда в силу произвольности выбора a и b и следует утверждение задачи.

Комментарий. Только конкретный числовой пример — 0 баллов.

Показано, что $a^2 = b^2$, но не пояснено, почему равны все четыре квадрата — 6 баллов.

Получены только одно или несколько равенств вида $(a-b)(c+d) = 0$, дальнейшего содержательного продвижения нет — 1 балл.

Показано, что $a^2 = b^2$ *или* $c^2 = d^2$, дальнейшего содержательного продвижения нет — 2 балла.

8.2. Разрешается вырезать из шахматной доски размером 20×20 любые 18 клеток, а потом выставить на оставшиеся клетки несколько ладей, не бьющих друг друга. Какое наибольшее число ладей можно выставить таким образом? Ладьи бьют друг друга, если они стоят на одной горизонтали или вертикали доски и между ними нет вырезанных клеток.

(*О. Дмитриев, Р. Женодаров*)

Ответ. 38 ладей.

Решение. Назовём вырезанные клетки *дырками.* Кроме них, добавим к каждой вертикали доски по дырке снизу, а к каждой горизонтали — по дырке справа; всего добавлено $2 \cdot 20 = 40$ дырок.

Пусть на доске расставлено несколько ладей, не бьющих друг друга. Будем временно считать, что ладья бьёт только вправо и вниз. Тогда каждая ладья бьёт по одной дырке справа и снизу от себя (т. е. между ней и этими дыпками нет ни других дырок, ни других ладей). С другой стороны, каждую из 18 исходных дырок на доске бьёт не более двух ладей (максимум по одной сверху и слева), а каждую из 40 добавленных дырок — не более одной ладьи. Значит, всего ладей на доске не более $(18 \cdot 2 + 40)/2 = 38$.

Осталось привести пример расстановки 38 ладей, удовлетворяющей требованиям. Для этого вырежем все клетки одной из главных диагоналей доски, кроме двух угловых, и поставим ладьи на все клетки, соседние по сторонам с вырезанными. На рис. 1 показан пример подобной расстановки на доске 6×6.

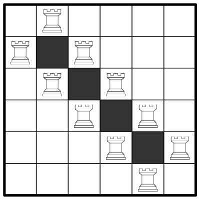


Рис. 1

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только пример расстановки 38 ладей — 2 балла.

Только доказательство, что ладей не больше 38 — 3 балла.

8.3. Делитель натурального числа называется *собственным*, если он меньше этого числа, но больше 1. У натурального числа n нашли все собственные делители (их оказалось не меньше трёх) и записали всевозможные их попарные суммы (повторно одинаковые суммы не записывали). Докажите, что полученный набор чисел не мог оказаться набором всех собственных делителей никакого натурального числа. (*А. Храбров*)

Решение. Предположим, что полученный набор чисел оказался набором всех собственных делителей некоторого числа m. Поскольку у числа n хотя бы три собственных делителя, среди них найдутся два делителя одной чётности. Тогда их сумма чётна. Число m делится на эту сумму, значит, оно тоже чётно. Следовательно, число 2, являющееся собственным делителем числа m, также было выписано. Но это невозможно, поскольку сумма любых двух собственных делителей числа n больше, чем 2.

Комментарий. Доказано, что число m чётно, дальнейшего содержательного продвижения нет — 3 балла.

8.4. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекают стороны CD и DA в точках P и Q соответственно. Оказалось, что $\angle APB = \angle BQC$. Внутри четырёхугольника выбрана точка X такая, что $QX \parallel AB$ и $PX \parallel BC$. Докажите, что прямая BX делит диагональ AC пополам. (*С. Берлов*)

Решение. Достаточно доказать, что расстояния от точек A и C до прямой BD равны. Это равносильно тому, что $S_{ABX} = S_{BCX}$, поскольку у треугольников ABX и BCX общее основание BX.

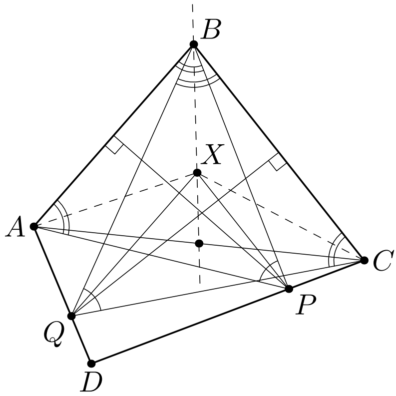


Рис. 2

Поскольку $QX \parallel AB$, имеем $S_{ABX} = S_{ABQ}$. Аналогично, $S_{CBX} = S_{CBP}$. Заметим, что равнобедренные треугольники ABP и CBQ подобны по двум углам, поэтому $AB/BC = BP/BQ$, откуда $AB \cdot BQ = CB \cdot BP$. Так как $\angle ABP = \angle CBQ$, то и $\angle ABQ = \angle CBP$. Следовательно, площади треугольников ABQ и CBP относятся как произведения заключающих равные углы сторон, т. е. эти площади равны. Но тогда $S_{ABX} = S_{ABQ} = S_{CBP} = S_{CBX}$, что и требовалось доказать.