11-1-28

ТЕТРАДЬ

для регионального этапа всероссийской олимпиады школьников

учени_____ класса по математике

_____ школы (1 тур)

ученицы 11 класса

МОУ „Лицей N5"

Чеусовой Анны Ивановны

I тур Шифр: 11-1-28

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	6	[illegible]
2	3	[illegible]
3	7	[illegible]
4	1	В. [illegible]

Сумма: 17

11.1.

Дано: числа $a, x_1, x_2 \ldots x_{13}$.

$a = (1-x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots$
$\ldots(1-x_{13})$

Док-ть $a \cdot x_1 \cdot x_2 x_3 \ldots x_{13} = 0$.

Доказательство

1 случай: один, несколько или все из иксов $(x_1, x_2, x_3 \ldots)$ равен(ны) 1.

Тогда $a = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{13}) = 0$

В этом случает произведение $a \cdot x_1 \cdot x_2 \dots x_{13} = 0$, т.к $a=0$ - один из множителей.

2 случай:

Ни один из иксов $(x_1, x_2, x_3 \dots)$ не равен 1. Тогда: $a \neq 0$

$$\begin{cases} a = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13}) & (1) \\ a = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13}) & (2) \end{cases}$$

В этом случае мы можем поделить ~~обе части~~ уравнения системы одно на другое $(1):(2)$

$$\frac{a}{a} = \frac{(1+x_1)\dots(1+x_{13})}{(1-x_1)\dots(1-x_{13})} = 1.$$

~~Возведём обе части в квадрат~~:

Домножим числитель и знаменатель на сопряженное $(1+x_1)\dots(1+x_{13})$

$$1 = \frac{(1+x_1)^2\dots(1+x_{13})^2}{(1-x_1^2)\dots(1-x_{13}^2)}$$

$(1+x_1)^2 \geqslant 1$ $(1+x_2)^2 \geqslant 1$ и т.д.

$1-x_1^2 \leqslant 1$ $(1-x_2^2) \leqslant 1$ и т.д.

т.е. $(1+x_1)^2(1+x_2)^2\ldots(1+x_{13})^2 \geqslant 1$,

а $(1-x_1^2)(1-x_2^2)\ldots(1-x_{13})^2 \leqslant 1$

А чтобы их соотношение равнялось единице, они должны быть равными (т.е. в данном случае в пересечение составляет 1, что соблюдается только при

$x_1 = x_2 = \ldots = x_{13} = 0. \longrightarrow a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots x_{13} = 0$

Иначе этот случай можно доказать так: $g(x) = (1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{13})$ - произведение возрастающих функций, значит $g(x)$ - возрастающ

а $f(x) = (1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{13})$ - произведения 13 (т.е. нечётного количества) убывающих функций, следовательно $f(x)$ - убывающая.

Из монотонности двух функций следует, что уравнение

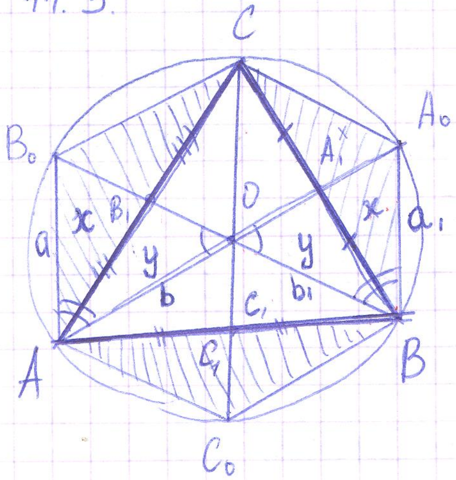
$g(x) = f(x)$ имеет не более 1 корня. (набора корней для $x_1, x_2, x_3 \ldots$), в котором иксы могут менятся между собой значениями. (но нобор корней один).

Этот набор и есть $x_1 = x_2 = \ldots = x_{13} = 0$

При этом соблюдается

$a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_{13} = 0.$

11.3.



$S_{CA_0B} = S_{AC_0B} = S_{ACB_0}$

$B \Delta BCA_0$: A_0A_1 - медиана $\Rightarrow S_{CA_1A_0} = S_{BA_1A_0}$

Аналогично

$S_{AC_1C_0} = S_{BC_1C_0} = \frac{1}{2} S_{ABC_0}$

$S_{AB_1B_0} = S_{CB_1B_0} = \frac{1}{2} S_{ACB_0}$

Из равенства площадей ΔCA_0B, ΔAC_0B и ΔACB_0 следует, что равны и их половинные величины:

$\frac{1}{2} S_{ABC_0} = S_{AC_1C_0} = S_{BC_1C_0} = S_{AB_1B_0} = S_{CB_1B_0} =$

$= S_{CA_1A_0} = S_{BA_1A_0} = X.$

Обозначим эту величину за X.

ΔABC

AA_1 - медиана $\Rightarrow S_{ACA_1} = S_{BAA_1}$

$B \Delta BOC$ OA_1 - медиан. $\Rightarrow S_{BOA_1} = S_{COA_1}$

$\left.\begin{matrix} S_{ACA_1} = S_{BAA_1} \\ S_{BOA_1} = S_{COA_1} \end{matrix}\right\} S_{ACO} = S_{BOA}$

В треугольниках ACO и ABO медианы OB_1 и OC_1 соответственно. Следовательно

$$\left.\begin{aligned} S_{AOB_1} &= S_{COB_1} = \frac{1}{2} S_{AOC} \\ S_{AOC_1} &= S_{BOC_1} = \frac{1}{2} S_{AOB} \\ S_{AOC} &= S_{AOB} \end{aligned}\right\} \quad S_{AOB_1} = S_{COB_1} = S_{AOC_1} = S_{BOC_1} = y.$$

Обозначим эту величину за y.

$\triangle AOB_0 \sim \triangle BOA_0$:

1) $\angle A_0OB = \angle B_0OA$ (вертикальные)

2) $\angle B_0AO = \angle A_0BO$ (опираются на дугу $\overset{\frown}{A_0B_0}$ и являются вписанными.

Пусть $AB_0 = a \quad AO = b \quad A_0B = a_1 \quad BO = b_1$

$a_1 = ka \quad b_1 = kb$, где k - коэф. подобия.

$$S_{AB_0O} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin B_0AA_0 = S_{B_0AB_1} + S_{B_1AO} = x + y$$

$$S_{BA_0O} = \frac{1}{2} a_1 b_1 \cdot \sin B_0BA_0 = S_{A_0BA_1} + S_{A_1BO} = x + y$$

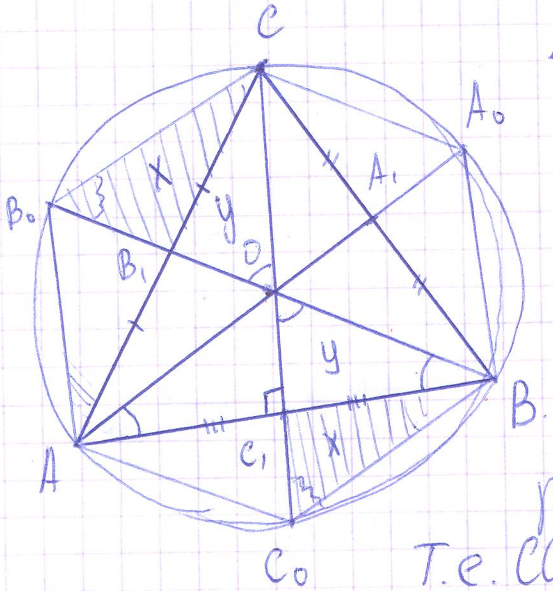
т.е. площади треугольников равны

$$\frac{1}{2} ab \cdot \sin B_0AA_0 = \frac{1}{2} a_1 b_1 \cdot \sin B_0BA_0$$

$$ab = a_1 b_1 = k^2 \cdot ab \quad k^2 = 1 \quad k = 1. \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ треугольники равны. $\Rightarrow AO = BO$

$\triangle AOB$:



ΔAOB:
$AO = BO \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle OAB = \angle OBA \Rightarrow$
$=$ т.к. OC_1 - медиана, то она же является высотой и биссектриссой угла AOB.
Т.е. CC_1 - высота и медиана в $\Delta ABC \Rightarrow$
$\Rightarrow AC = BC$.

Аналогично: $\Delta OCB_0 = \Delta OBC_0 \Rightarrow$
$\Rightarrow CO = BO \Rightarrow OA_1$ - высота в $\Delta COB \Rightarrow AA_1$ - высота и медиана в $\Delta ABC \Rightarrow AC = AB$.

$\left.\begin{array}{l} AC = BC \\ AC = AB \end{array}\right\} \Delta ABC$ - равносторонний (что и требовалось док-ть).

11.2. Пусть x - кол-во супружеских пар. Тогда кол-во мам $= x$ и количество пап тоже $= x$. А количество детей пусть c.

Количество способов выбрать 3 семьи

$$A_x^3 = \frac{x!}{(x-3)!} = x\cdot(x-1)(x-2).$$

В каждой из 3 семей по 2 родителя, значит способов выбрать маму и папу из 3 семей $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 2\cdot3 = 6.$

Количество способов выбрать ребёнка из оставшейся семьи равно количеству детей в этой семье — c_1

Тогда $\underbrace{\text{выбрать}}_{}$ кол-во способов выбрать нужную тройку людей равно

$$A_x^3 \cdot 6 \cdot c_1 = 3630$$

$$6xc_1(x-1)(x-2) = 3630.$$

Рассмотрим случай, когда в каждой семье было одинаковое количество детей c_1, тогда $c = c_1 \cdot x$?

$$6xc_1(x-1)(x-2) = 6c(x-1)(x-2) = 3630$$

$$c(x-1)(x-2) = \cancel{650}\ 605 = 5\cdot121. = 5\cdot11^2$$

Для уравнения $c = \frac{5\cdot11\cdot11}{(x-1)\cdot(x-2)}$ нет корней с целыми значениями x и c.

Другой способ:

Из x семей способов выбрать маму и папу равно $x \cdot (x-1) = A_x^2$

а кол-во способов выбрать ребёнка из случайной семьи $= c_1$

Тогда

$X(X-1) \cdot c_1 = 3630$

$c \cdot (X-1) = 3630$

$c = \frac{3630}{X-1} = \frac{11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3}{X-1}$

Не читать.

1) $X-1 = 11 \quad X = 12$ семей.

$c = 11 \cdot 3 \cdot 10 = 330$ детей.

но $c_1 = \frac{c}{X} \in [1; 10]$.

$\frac{c}{X} = \frac{330}{12} > 10 \Rightarrow c = 330$ – не уд.

2) $X-1 = 3 \cdot 10 = 30$.

А количество способов выбрать из оставшихся семей одну, из которой ещё не брали ни ~~родит~~ папу, ни маму равно $(X-2)$ (2 - кол-во семей, из которых уже выбрали родителей).

$x \cdot (x-1)(x-2) \cdot c_1 = 3630$ $\quad$ $c = c_1 x$ детей поровну?

$c(x-1)(x-2) = 3630$

$c = \dfrac{11 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 3}{(x-1)(x-2)}$ $\quad$ $(x-1)(x-2) = 10 \cdot 11$ $\quad$ $2 \cdot 3$

$x = 12$ $\quad$ $5 \cdot 6$

$c = 11 \cdot 3 = 33$ ребёнка

Проверка $\dfrac{c}{x} = \dfrac{33}{12} \in [1; 10] \Rightarrow c = 33$ удовл. усл-ию.

Ответ: 33 ребёнка.

11.4.

$ab + bc + ac = 1.$

Рассмотрим частный случай:

$a = b = c \quad a^2 + a^2 + a^2 = 1 \quad a = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = b = c.$

При этом значении обе части неравенства

$\sqrt{a + \dfrac{1}{a}} + \sqrt{b + \dfrac{1}{b}} + \sqrt{c + \dfrac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$

будут равны

$3\sqrt{\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}} \geq 2 \cdot \dfrac{3}{\sqrt[2]{3}} \qquad \dfrac{3\sqrt{4}}{\sqrt[2]{3}} \geq \dfrac{6}{\sqrt[3]{3}} \qquad \dfrac{6}{\sqrt[2]{3}} \geq \dfrac{6}{\sqrt[2]{3}}.$

11-2-28

ТЕТРАДЬ

для регионального этапа всероссийской олимпиады школьников по математике (II тур)

учени цы 11 класса

Лицей №5 города Железногорска школы

Чеусовой Анны

Ивановны

I тур Шифр: 11-2-28

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	2	
2	1	
3	0	
4	0	

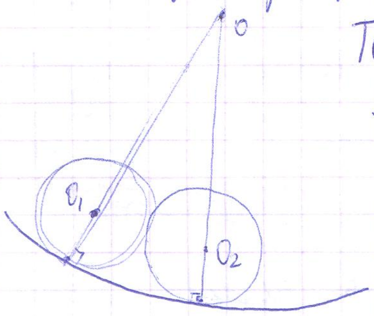
Сумма:

11.6.

Пусть O – центр вазы (центр сферы, котор. образована ваза).

O_1, O_2, O_3, O_4 – центры одинаковых сфер-апельсинов.

А O_5 – центр грейпфрута.



Точки касания с вазой апельсинов равноудалены от т. O. на расстояние R (радиус сферы-возы).

Тогда и центры апельсинов O_1, O_2, O_3 и O_4 равноудалены от центра O на расстояния $R-r$, где r – радиус апельсина.

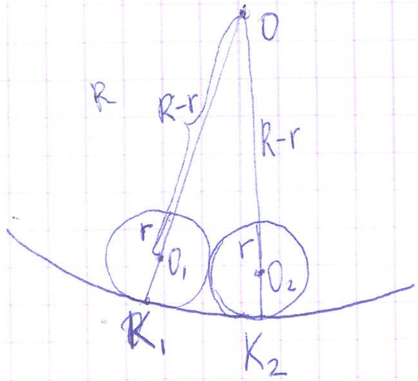


рис 1.

Точка пересечения (касания) любых двух апельсинов лежит на середине линии, соединяющей центры апельсинов. На середине, т.к. радиусы апельс. равны.

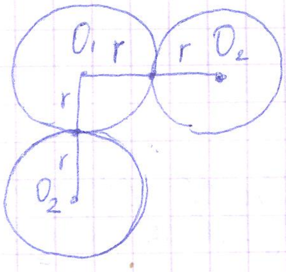


рис. 2

Из этого же следует, что $O_1O_2 = 2r = O_2O_3 = O_3O_4 = O_4O_1$. (рис. 2).

Как было сказано выше, $R-r = OO_1 = OO_2 = OO_3 = OO_4$

Т.е. если провести сферу с радиусом $R-r$, концентрическую со сферой вазы, то точки будут лежать на ней. Если точки O_1, O_2, O_3 и O_4 Нет доказательства лежат в одной плоскости, то эта плоскость будет рассекать новую сферу с радиусом $R-r$, и в сечении будет получаться окружность, в которую вписан четырёх угольник $O_1O_2O_3O_4$.

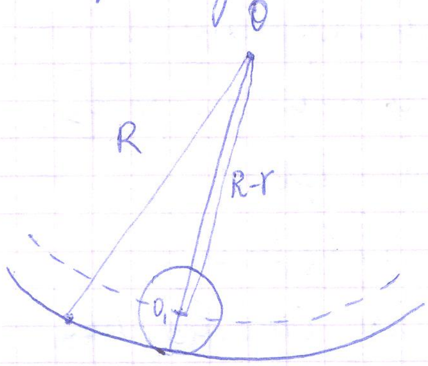
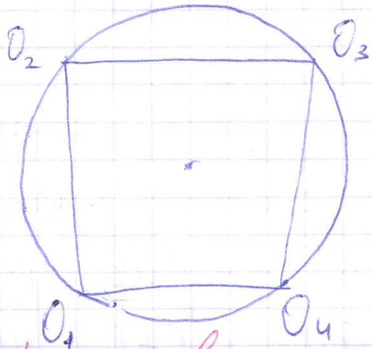


рис 3



нет доказательств

Если это так, то сумма углов

$\angle O_1O_2O_3 + \angle O_1O_4O_3 + \angle O_2O_3O_4 + \angle O_2O_1O_4 = \cancel{180}\ 360^\circ$

$\triangle O_1OO_2 = \triangle O_2OO_3$: 1) $O_1O = O_2O = OO_3$

В условии не требуется касания апельсинов

2) O_2O - общая сторона

3) $O_1O_2 = O_2O_3$

Аналогично

$\triangle OO_2O_3 = \triangle OO_3O_4 = \triangle OO_4O_1$

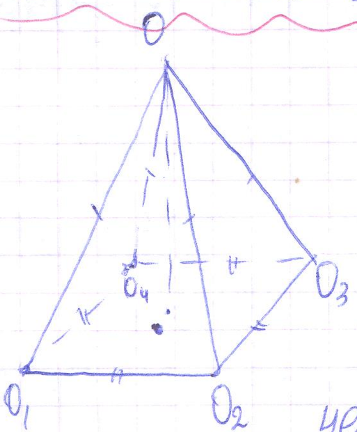


рис. 4.

Фигура, образованная четырьмя равными треугольниками (равнобедренными), является правильной пирамидой, где $O_1O_2O_3O_4$ - основание, поэтому $O_1O_2O_3O_4$ лежат в одной

?

плоскости.

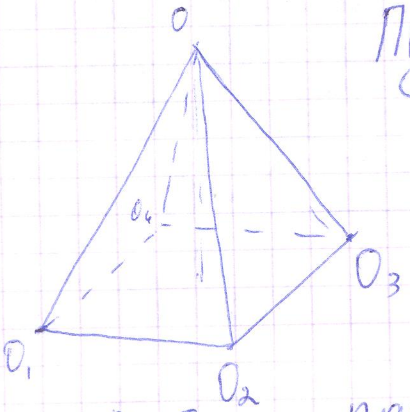


рис. 5

Пусть A_1 A_2 A_3 и A_4 – точка касания грейпфрута с апельсинами, а O_5 центр грейп.

Точки $O_1 O_2 O_3 O_4$ равноудалены от O_5 на расстояние $r + r_5$, где r_5 - радиус грейпфрута.

Расположение фруктов показано на рисунке 6.

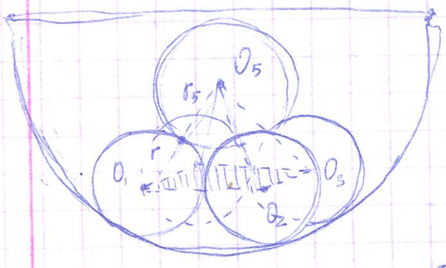
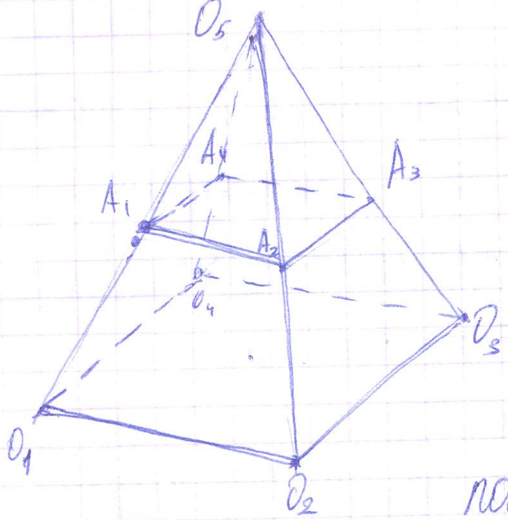


рис. 6.

Итак, на сторонах правильной пирамиды $O_1O_2O_3O_4O_5$ отложили равные отрезки $O_5A_1 = O_5A_2 = O_5A_3 = O_5A_4 = r_5$ (рис. 7).

$\Delta O_1O_2O_5$.

По теореме Фалеса так как



$\frac{O_5A_1}{A_1O_1} = \frac{O_5A_2}{A_2O_2} = \frac{r_5}{r}$, то

прямые A_1A_2 и O_1O_2 параллельны.

Их параллельность также доказывается подобием треугольников $\triangle O_1O_2O_5$ и $\triangle A_1O_5A_2$

Аналогично: $O_2O_3 \parallel A_2A_3$, $O_3O_4 \parallel A_3A_4$

Т.к. пересекающиеся прямые O_1O_2, O_2O_3 параллельны двум пересекающимся прямым A_1A_2, A_2A_3, то пл-ти $O_1O_2O_3 \parallel A_1A_2A_3$. Альтернативно можно док-ть подобие $\triangle O_1O_2O_4$ и $\triangle A_1A_2A_4$. (также можно взять треугольники $\triangle O_1O_2O_3$, $\triangle A_1A_2A_3$ и т.д.), из чего следует, что и A_1, A_2, A_3 и A_4 лежат в одной плоскости.

(Что и требовалось доказать)

Ответ: да, верно.

Это — к какой-то другой задаче!

11.8.

У пар $\underbrace{4\text{-}5,\ 14\text{-}15\ \ldots\ 94\text{-}95}_{n_1=8}$ по 2 перестанов

(40-59 не учитываются).

А у чисел 40-59 перестановок:

$$\underbrace{2\cdot3\cdot4\cdot4\ldots4\cdot4\cdot4\cdot3\cdot2}_{n_2=20}$$

Первый множитель 2, т.к. у 40 есть только 2 соседних числа, содержащих цифру 4 или 5 и отличающихся не больше, чем на 2. Также у 59. А у 41 и 58 - по 3. У остальных натуральных чисел из промежутка [40; 59] по 4 таких соседних числа.

Знагит, количество последоват-ей:

$$\cancel{N = 2^{n_1}\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^{n_2-4} = 2^8\cdot2^2\cdot3^2\cdot4^{16} =}$$

$$\cancel{= 2^{10}\cdot9\cdot2^{36}} = 1024\cdot9\cdot1024^3\cdot64.$$

$$N = 2\cdot n_1 + 2^2\cdot9\cdot4^{18} = 16 + 36\cdot2^{36}$$

11.5.

Пусть $f(x) = mx^2+nx+c$

$D = n^2-4mc \qquad x = \dfrac{-n\pm\sqrt{n^2-4mc}}{2m}$

корни:

$$a=\frac{-n+\sqrt{n^2-4mc}}{2m} \qquad b=\frac{-n-\sqrt{n^2-4mc}}{2m}$$

($n^2-4mc>0$, т.к. корней 2 и они различны по условию)

$f(a^2+b^2)=m(a^2+b^2)^2+n(a^2+b^2)+c$

$f(2ab)=m(2ab)^2+n(2ab)+c$

$f(a^2+b^2)\geqslant f(2ab)$

$m(a^2+b^2)^2+n(a^2+b^2)+c\geqslant m(2ab)^2+n(2ab)+c$

$m((a^2+b^2)^2-(2ab)^2)+n(a^2+b^2-2ab)\geqslant 0.$

$m(a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab)+n(a-b)^2\geqslant 0.$

$m(a-b)^2(a+b)^2+n(a-b)^2\geqslant 0.$

$(a-b)^2>0$ всегда ($(a-b)^2\neq 0$, т.к. $a\neq b$)

$m(a+b)^2+n\geqslant 0.$ (1)

$$a+b=\frac{-n+\sqrt{n^2-4mc}}{2m}+\frac{-n-\sqrt{n^2-4mc}}{2m}=$$

$$=-\frac{2n}{2m}=-\frac{n}{m}. \qquad (2)$$

$(2)\rightarrow(1).$

$m\cdot\left(-\frac{n}{m}\right)^2+n\geqslant 0 \qquad \frac{n^2}{m}+n\geqslant 0.$

$n\left(1+\frac{n}{m}\right)\geqslant 0 \qquad n(1-a-b)\geqslant 0.$

a и b - коэффициэнты

$ax^2+bx+c=f(x)$.

$f(a^2+b^2)\geqslant f(2ab)$

$a(a^2+b^2)^2+b(a^2+b^2)+c\geqslant a(2ab)^2+b(2ab)+c$

$a((a^2+b^2)^2-(2ab)^2)+b(a^2-2ab+b^2)\geqslant 0$

$a(a+b)^2(a-b)^2+b(a-b)^2\geqslant 0$.

$(a-b)^2\geqslant 0$ всегда.

$(a-b)^2\underbrace{(a(a+b)^2+b)}\geqslant 0$.

$a(a+b)^2+b\geqslant 0$.

$f(a)=0$

$a^3+ba^2+c=0$ $D>0$ $D=b^2-4ac$.

$f(b)=0$

$ab^2+b^2+c=0$.

$a^3+ba=ab^2+b^2$

$a(a^2-b^2)+b(a-b)=0$

$a(a-b)(a+b)+b(a-b)=0$.

$(a-b)(a(a+b)+b)=0$.

$D>0$ $D=b^2-4ac$ $b^2>4ac$.

корни

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

11.7.

$a > b$