11-1-24

ТЕТРАДЬ

для регионального этапа

Всероссийской олимпиады школьников по математике (I тур)

ученика 11 класса

МБОУ «Лицей №21» школы г. Курска

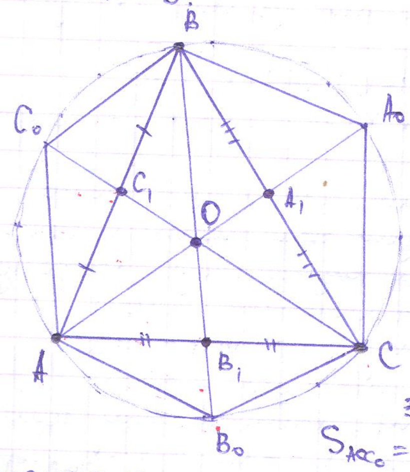
Суровцева Максима Андреевича

I тур Шифр: 11-1-24

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	6	
2	0	
3	1	
4	1	

Сумма: 8

№11.3



1) Т.к. AA_1, BB_1, CC_1 – медианы, то $AC_1 = BC_1$; $A_1B = CA_1$; $AB_1 = B_1C$; т.к. медианы тр-ка делят его на 6 равновеликих тр-в (по св-ву), то $S_{\triangle BOC_1} = S_{AOC_1} = S_{AOB_1} = S_{COB_1} = S_{COA_1} = S_{BOA_1}$.

2) Т.к. $S_{ABC_0} = S_{ACB_0} = S_{BCA_0}$ по условию, то их половины равны, т.е. $S_{AC_0C_1} = S_{BC_0C_1} = S_{AB_0B_1} = S_{B_0B_1C} = S_{CA_1A_0} = S_{BA_1A_0}$ (по св-ву медиан), где медианами являются отрезки C_0C_1, B_0B_1 и A_0A_1.

3) Т.к. $S_{AC_0C_1} = S_{AB_0B_1}$ и $S_{AC_1O} = S_{AOB_1}$, то $S_{AC_0O} = S_{AOB_0}$. Имеем, 4хуг-к AC_0OB_0, в к-м диагональ делит его на 2 равновеликие части, след-но, ? этот 4хуг-к AC_0OB_0 – параллелограмм, тогда его стороны попарно равны и параллельны, т.е. $AC_0 = OB_0$ и $AC_0 \parallel OB_0$ и $AB_0 = OC_0$ и $AB_0 \parallel OC_0$, значит, $AB_0 \parallel CC_0$, откуда имеем, что AB_0CC_0 – трапеция, а т.к. она вписана в окр-ть, то

он правильный, след-но, $AC_0 = CB$ и т.O – центр опис. окр-ти, а значит, $CO = OC_0$, откуда имеем, что точка O – ~~...~~ центр окр-ти, опис. около исходного треугольника $\triangle ABC$. Зная, что ~~центр~~ т.O – точка пересечения медиан (по построению), получаем, что в $\triangle ABC$ центр описанной окружности – точка пересечения медиан, что характерно только для правильного треугольника, т.е. $\triangle ABC$ правильный (равносторонний)

ч.т.д.

№11.1

$$a = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})$$

Случай 1.

Равенство возможно, если $a=1$, т.е. все оставшиеся целые числа равны ~~0, тогда~~ $x_1 = x_2 = \dots = x_{13} = 0$, тогда произведение $a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{13} = 0$ соотв. равно 0. Аналогично, когда $a = 0$, т.е. одно из чисел $x_1, x_2 \dots x_{13} = \pm 1$

ч.т.д.

Случай 2

Если ~~...~~ $a \neq 0$ и $a \neq 1$, то запишем условие в виде

$$(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13}) \neq 0$$

Разделим обе части на $(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13}) \neq 0$, получим

$$\frac{(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13})}{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})} = 1.$$ Заметим, что равенство будет выполняться лишь в том случае, когда каждому числу будет иметься противоположное число, например, $x_1 = -x_{13}$, $x_2 = -x_{12}$ и т.д., но т.к. чисел 13, т.е. нечетное количество, найдется такое число, которое должно быть противоположно само себе (если мы продолжим ряд $x_1 = -x_{13}, x_2 = -x_{12}, \dots$, то таким числом станет x_7, ~~будет ...~~ получим следующее: $x_7 = -x_7$), что возможно лишь в случае, когда $x_7 = 0$. Значит, одно из чисел обязательно будет равно 0, а след-но, произведение $a \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{13} = 0$ будет выполняться всегда.

ч.т.д.

№11.4 Зная, что $a+\frac{1}{a}\geq 2$, то $\sqrt{a+\frac{1}{a}}\geq\sqrt{2}$ и $\sqrt{a+\frac{1}{a}}>\sqrt{a}$.

~~$ab+bc+ca=1$, отсюда имеем, что 2 числа a, b ... не превосход~~

Т.к. $ab+bc+ca=1$, откуда имеем, что 2 числа обязательно меньше 1.

Случай 1.

$a=b=c$, откуда $a^2+a^2+a^2=1$, $a^2=\frac{1}{3}$, т.е. $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

~~подставим~~ Заметим, что это крайняя точка решения неравенства $a+\frac{1}{a}\geq 4a$ или же $\sqrt{a+\frac{1}{a}}\geq 2\sqrt{a}$, т.к. все переменные равные, то получаем, что условие выполняется.

ч.т.д.

Случай 2

Равные 2 переменные, допустим $a=b$, тогда получим $a\cdot a+a\cdot c+c\cdot a=1$, выразим c и подставим в исходное неравенство: $a^2+2ac=1$, откуда $c=\frac{1-a^2}{2a}$, тогда имеем

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{1-a^2}{2a}+\frac{2a}{1-a^2}}\geq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{a}+\sqrt{\frac{1-a^2}{2a}}\right)$$

$$2\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{\frac{(1-a^2)^2+4a^2}{2a(1-a^2)}}\geq 2\sqrt{a}+2\sqrt{\frac{1-a^2}{2a}}$$

~~Сгруппируем слагаемые~~

$$2\left(\sqrt{a+\frac{1}{a}}-\sqrt{a}\right)+\sqrt{\frac{(a^2+1)^2}{2a(1-a^2)}}-2\sqrt{\frac{1-a^2}{2a}}\geq 0$$

$$2\sqrt{\frac{a^2+1}{a}}+\frac{a^2+1}{\sqrt{2a(1-a^2)}}\geq 2\sqrt{a}+2\sqrt{\frac{1-a^2}{2a}}$$

$$4\cdot\frac{a^2+1}{a}+\frac{(a^2+1)^2}{2a(1-a^2)}+4\sqrt{\frac{a^2+1}{a}}\cdot\frac{a^2+1}{\sqrt{2a(1-a^2)}}\geq 4a+4\frac{1-a^2}{2a}+8\sqrt{\frac{1-a^2}{2}}$$

$$\frac{4a^2+4-4a^2}{a}+\frac{a^4+2a^2+1-(1-a^2)^2}{2a(1-a^2)}+4\sqrt{\frac{a^2+1}{a}}\cdot\frac{a^2+1}{\sqrt{2a(1-a^2)}}\geq 2\sqrt{2(1-a^2)}$$

$$\frac{4}{a}+\frac{2a}{1-a^2}+4\frac{\sqrt{a^2+1}}{a}\cdot\frac{a^2+1}{\sqrt{2(1-a^2)}}\geq 2\sqrt{2(1-a^2)}\quad\Big|\cdot a$$

$$4+\frac{2a^2}{1-a^2}+4\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{a^2+1}{\sqrt{2(1-a^2)}}\geq 2\sqrt{2(1-a^2)}\quad\Big|\cdot\sqrt{2(1-a^2)}$$

$\cancel{4\sqrt{2(1-a^2)} + \frac{2a^2}{1-a^2}\sqrt{2(1-a)^2} + 4\sqrt{2(a^2-a^2)}}$

$$4\sqrt{2(1-a^2)} + \frac{2a^2}{1-a^2}\sqrt{2(1-a^2)} + 4\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3 \geq 2$$

$$4\sqrt{2(1-a^2)} + \frac{2\sqrt{2}\,a^2}{\sqrt{1-a^2}} + 4\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3 - 2 \geq 0 \quad \Big|\cdot\sqrt{1-a^2}$$

$$4\sqrt{2}\cdot(1-a^2) + 2\sqrt{2}a^2 + 4(a^2+1)\sqrt{1-a^4} - 2\sqrt{1-a^2} \geq 0$$

$$4\sqrt{2} - 4\sqrt{2}a^2 + 2\sqrt{2}a^2 + 4(a^2+1)\sqrt{1-a^4} - 2\sqrt{1-a^2} \geq 0$$

$$4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}a^2 + \sqrt{1-a^2}\left(4(a^2+1)\sqrt{1+a^2} - 2\right) \geq 0$$

$$4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}a^2 + \sqrt{1-a^2}\left(4\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3 - 2\right) \geq 0$$

Т.к. $a \in (0;1)$, то произведем оценку:

1) $\left(4\sqrt{2} - 2\sqrt{2}a^2\right) > 0$

2) $\sqrt{1-a^2} > 0$ по определ.

3) $\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3 > 1$, тогда $4\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3 > 4$, след-но,

$4\left(\sqrt{a^2+1}\right)^3 - 2 > 2$

Итак, каждое слагаемое ~~больше~~ больше нуля, след-но, вся сумма положительна, т.е. исходное неравенство верно. Случай, когда $a+b+c$ невозможен, т.к. в данном случае не выполн. усл $ab+bc+ac=1$. ч.т.д.

№11.2

Разложим 3630 на простые множители:

$3630 = 2\cdot3\cdot5\cdot11\cdot11$

Число вариантов Деда Мороза будет считаться по формуле $n!\, x_1\cdot x_2\cdot x_3\ldots = 3630$, где n – число семей, а $x_1, x_2\ldots$ – число человек в каждой семье.

Определим возможные варианты.

$n=3 \longrightarrow n! = 6$, т.е. $3630 = 6 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$, т.е.

$3630 = 6 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 11$

могли быть всего 3 семьи, причем в одной из них 5 человек (3 детей), 11 человек (9 детей) и 11 человек (9 детей), тогда всего детей: $3+9+9=21$ ребенок.

Заметим, что других вариантов, подходящих по формуле нет, т.е. всего может ~~21~~ быть 21 ребенок.

Ответ: 21.

11-2-24

ТЕТРАДЬ

для региональный этап

всероссийской олимпиады школьников по математике (II тур)

ученика 11 класса

МБОУ „Лицей №21" школы г. Курска

Суровцева Максима Андреевича

|I тур Шифр: 11-2-24

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	5	[signature]
2	0	[signature]
3	5	[signature]
4	1	[signature]

Сумма:

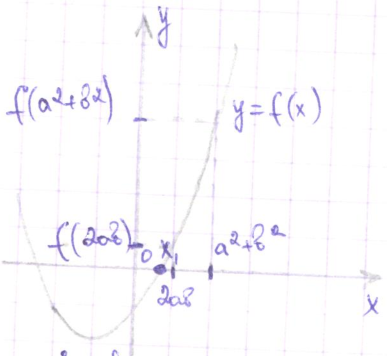
№ 11.5

$f(x)$ – квадратный трехчлен, имеющий 2 корня по условию, тогда $f(x)$ имеет вид: $f(x) = kx^2 + mx + n$ и $D > 0$.

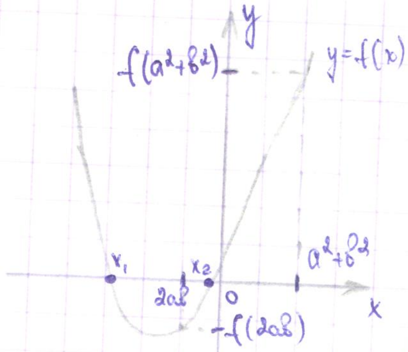
Также известно, что $f(a^2+b^2) \geq f(2ab)$. Рассмотрим числа (a^2+b^2) и $(2ab)$. Заметим, что $a^2+b^2 \geq 2ab$ верно всегда т.к. $a^2+b^2-2ab = (a-b)^2 \geq 0$. Т.е. получаем что ф-ия от большего аргумента больше ф-ии от меньшего аргумента. Значит, ф-ия возрастает. Понимаем, что для выполнения условия $f(a^2+b^2) \geq f(2ab)$ необходимо, чтобы на промежутке $x \in [0; +\infty)$ ф-ия возрастала, значит, $k > 0$ и $x_0 \leq 0$ (вершина), т.е. график ф-ии $f(x)$ – парабола с ветвями вверх и $x_0 \leq 0$. ~~Правая ветвь параболы будет пересекать правую полуось Ox, а след-но, левая – левую полу.~~ Тогда левая ветвь параболы будет обязательно пересекать ось Ox слева от оси Oy, сл-но, хотя бы один из корней уравнения будет отрицательным.

a^2+b^2 всегда положительно, поэтому в случае, когда $2ab<0$ ~~условие~~ и ф-ия имеет 2 отрицательных корня условие тем более будет выполняться (т.к. $|a^2+b^2| \geq |2ab|$).

Дадим графическую интерпретацию:



1 корень положительный



2 корня отрицательны

Таким образом, получаем, что для выполнения условия $f(a^2+b^2) \geq f(2ab)$, необходимо, чтобы исходная ф-ия $f(x)$ имела хотя бы один отрицательный корень (1 или 2).

ч.т.д.

№11.6

Это нужно доказать!

~~Обязательно~~

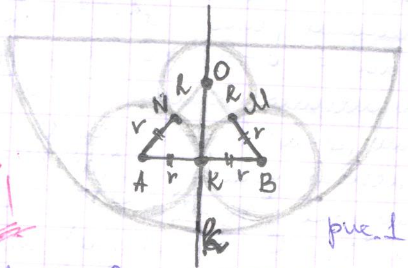


рис.1

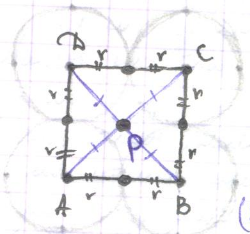


рис.2 (вид сверху)

Чтобы выполнялось условие касания ~~ребят~~ всех четырех апельсинов, необходимо, чтобы они лежали на одном уровне, т.е. чтобы центры их окружностей лежали в одной плоскости (см. рис 2). Т.к. апельсины одинаковые, то

Почему?

их радиусы равны. Центры A, B, C и D лежат в одной пл-ти (ABCD), а значит, и прямые AB, BC, CD и DA лежат в этой плоскости, причём отрезки AB, BC, CD и DA равны, т.е. $AB = BC = CD = DA$.

Рассмотрим рисунок 1 (вид сбоку). Соединим центры окружностей A и B и проведём радиус вазн – прямую l через точку ~~касания окружностей~~ P. Чтобы грейпфрут касался всех апельсинов, необходимо, чтобы центр его сферы лежал на прямой l (точка P – точка в плоскости (ABCD), равноудалённая от точек A, B, C и D, т.е. точка пересечения диагоналей AC и BD квадрата ABCD).
В таком случае получим треугольник $\triangle AOB$, где O – центр сферы грейпфрута, в котором $AB = 2r$, r – радиус апельсина, $AO = OB = r + R$, где R – радиус грейпфрута. Проведём через точку касания окр-ней апельсинов K прямую k, проход. через точку O. Заметим, что независимо от того, где на прямой k располагается точка O, отрезки BM и AN остаются равными (т.к. они радиусы) след-но, прямая NM всегда будет параллельна прямой AB.

Т.к. радиусы всех апельсинов равны, то в оставшихся трёх случаях (для B, C; C, D и A, D) будем получать тот же результат, тогда получим правильную пирамиду OABCD, где O – центр грейпфрута; A, B, C и D – центры апельсинов; $AN = MB = CS = DT = r$; $ON = OM = OS = OT = R$; $NM \parallel AB$, $MS \parallel BC$, $ST \parallel CD$, $TN \parallel AD$, ~~откуда~~ откуда можно сделать вывод, что точки NMST (точки касания грейпфрута и апельсинов) будут лежать в одной плоскости (NMST), которая будет параллельна пл-ти (ABCD).

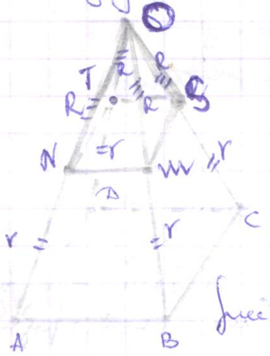
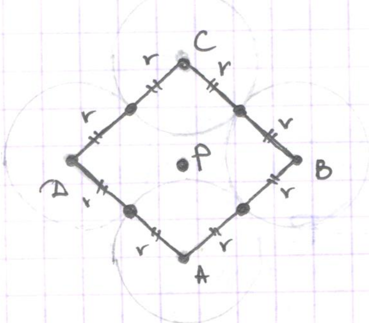


рис 3.

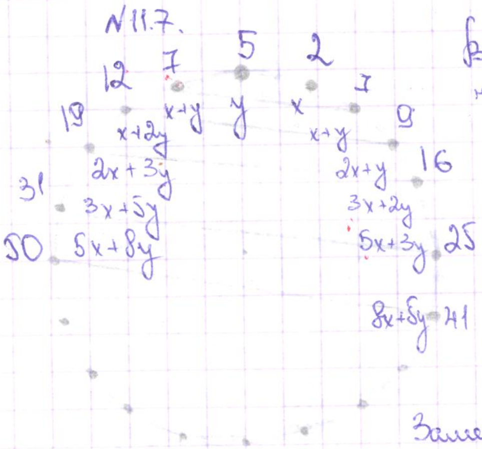
Случай, когда апельсины будут лежать около стенки или случай когда ~~апельсины будут~~ центры апельсинов будут составлять параллелограмм (см. рис 4), будут давать аналогичный результат.

Значит, точки касания апельсинов и грейпфрута будут обязательно лежать в одной плоскости, т.е. утверждение верно.



Ответ: верно.

№11.7.



Возьмем первым число 5, вторым число 2 (5 „и 2" обозначим как „нулевые места"). Следуя указанному правилу, найдем несколько чисел на окр-ности.

Теперь обозначим 5=y, а 2=x, и снова посчитаем получающиеся ~~............~~ числа.

Заметим, что в симметричных числах коэффициенты ~~..........~~ меняются местами. Тогда к концу круга получим:

$px+ry$ → $mx+ky$

$rx+py$, где $r, p, k, m \in$ ... → $kx+my$

I II

1) $px+ry+mx+ky$ (как сумма предыдущих)

2) $kx+my+rx+py-mx-ky$ ← следуя правилу задания

1) $kx+my+rx+py$ (как сумма предыдущих)

2) $px+ry+mx+ky-kx-my$

Получаем: I) $px+ry+mx+ky = kx+my+rx+py-mx-ky$

$$(x-y)(p-r+m-k)+mx+ky=0$$

II) $py+rx+kx+my = px+ry+mx+ky-kx-my$

$$-(x-y)(p-r+m-k)+kx+my=0$$

Подставив значения x и y, получаем

$$+\begin{cases} 3(p-r+m-k)+2k+5m=0 \\ -3(p-r+m-k)+5k+2m=0 \end{cases}$$

$7k+7m=0$ не имеет решений в натур. числах, т.е. система не имеет решений, а значит, ~~что~~ не может существовать так, что все числа, кроме одного, равны разности своих соседей.

Ответ: нет

№11.8.

Запишем последовательности с тайной в 1: (исходные расстановки).

12345... 100

2345... 101

345.... 102

456... 103

56... 104

монотонность не обязательна!

Их всего 5.

Число последовательностей, в которых они составлены как 2 шаг и 1 ~~ровно 2~~ равно: $5\cdot(100-1)\cdot(99+98+\ldots+1)=99\cdot4950\cdot5=$
$=490.050\cdot5=2450250.$

число возможных изменений

число отличных от исх. расстановок

Ответ: 2450250