11-1-6

ТЕТРАДЬ

для регионального этапа

Всероссийской олимпиады школьников по математике (1 тур)

ученицы 11 класса

МБОУ "Гимназия школы № 44" г. Курска

Вертаковой Анастасии

Юрьевны

I тур Шифр: 11-1-6

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	3	
2	7	
3	5	
4	1	В.

Сумма:

16

№1

Дано:

$a, x_1, x_2, x_3, \dots x_{13} \in Z$

$a = (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13}) = (1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})$

Док-ть: $a x_1 x_2 \dots x_{13} = 0$

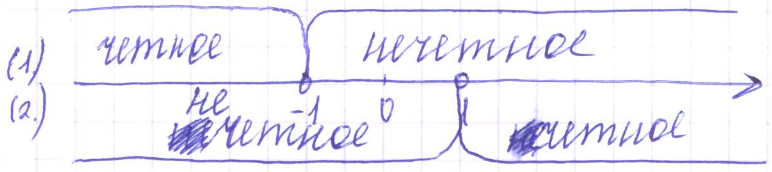
Рассмотрим случаи, когда $a>0$; $a=0$; $a<0$.

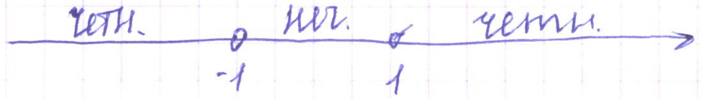
1) $a>0$

$$\begin{cases} (1+x_1)\cdot\dots\cdot(1+x_{13})>0 & (1) \\ (1-x_1)\cdot\dots\cdot(1-x_{13})>0 & (2) \end{cases}$$

(1) выполняется при:
чётном кол-ве $x_i < -1$
нечётном кол-ве $x_i > -1$

(2) выполняется при
~~не~~чётном кол-ве $x_i > 1$
нечётном кол-ве $x_i < 1$





~~[scribbled]~~ присутствует $x_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a x_1 x_2 \dots x_{13} = 0$

② $a = 0$

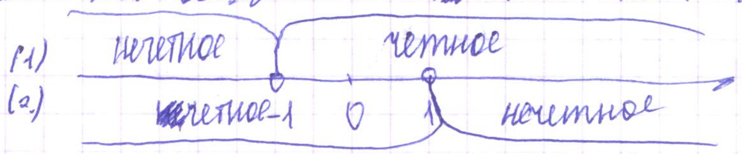
при $a = 0$ $a x_1 x_2 \dots x_{13} = 0$

③ $a < 0$

$$\begin{cases} (1+x_1)\dots(1+x_{13}) < 0 & (1.) \\ (1-x_1)\dots(1-x_{13}) < 0 & (2.) \end{cases}$$

(1) выполняется при:
чётном кол-ве $x_i > -1$
нечётном кол-ве $x_i < -1$

(2) выполняется при
нечётном кол-ве $x_i > 1$
~~не~~чётном кол-ве $x_i < 1$



нечетное   неч.   нечетное

$-1 \quad 0 \quad 1$

присутствует $x_i = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a x_1 x_2 \dots x_{13} = 0.$

$\Rightarrow$ во всех 3х случаях $a x_1 x_2 \dots x_{13} = 0.$

Доказано

№2

$M_1 П_1 \quad M_2 П_2 \quad \dots \quad M_x П_x$

$1 \le d_1 \le 10 \quad 1 \le d_2 \le 10 \quad 1 \le d_x \le 10$

всего способов $= (d_1 + d_2 + \dots + d_x) \cdot (x-1)(x-2) = 3630$

3630	2
1815	3
605	5
121	11
11	11
1	

1) $(x-1)(x-2) = 2 \cdot 3$

2) $(x-1)(x-2) = 5 \cdot 6$

3) $(x-1)(x-2) = 10 \cdot 11$

1) $x = 4$ max - 40 детей

$(d_1 + \dots + d_x) \cdot 2 \cdot 3 = 3630$

$(d_1 + \dots + d_x) = 605$ - слишком много

2) $x = 7$ max - 70 детей

$(d_1 + \dots + d_x) \cdot 5 \cdot 6 = 3630$

$(d_1 + \dots + d_x) = 121$ - слишком много

7

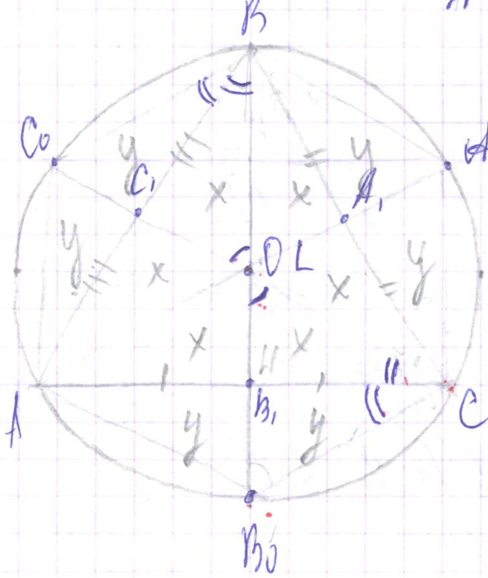
3) $x = 12$ max - 120 детей

$(d_1 + ... + d_x) \cdot 10 \cdot 11 = 3630$

$(d_1 + ... + d_x) = 33$ подходит

Ответ: могло быть 33 ребенка.

№3



Дано: $\triangle ABC$

окр (O, r) - описанная около $\triangle ABC$

AA_1, BB_1, CC_1 - медианы

$AA_1 \cap$ окр $= A_0$

$BB_1 \cap$ окр $= B_0$

$CC_1 \cap$ окр $= C_0$

$S_{ABC_0} = S_{AB_0C} = S_{A_0BC}$

Док-ть: $\triangle ABC$ - равносторонний.

Доказательство:

1) AA_1, BB_1, CC_1 - медианы
$AA_1 \cap BB_1 \cap CC_1 = L$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{BC_1L} = S_{BA_1L} = S_{CA_1L} = S_{CB_1L} = S_{AB_1L} = S_{AC_1L} = X$

(медианы делят треугольник на 6 равновеликих) ~~[illegible]~~

2) $\frac{1}{2} B_0 H \cdot AH = S_{AB_1B_0}$ что такое H. $(H = B_1)$?

$B_0H \cdot HC = S_{CB_1B_0}$ $AH = AC$ (B_0B_1 - медиана) $\Big\}$ $S_{AB_1B_0} = $ B_1 - ?

$S_{CB_1B_0} = y$

3) аналогично

$S_{AC_0C_1} = S_{BC_0C_1} = \frac{1}{2} S_{AC_0B}$

$S_{A_0BA_1} = S_{A_0CA_1} = \frac{1}{2} S_{A_0BC}$

$S_{AB_1B_0} = S_{CB_1B_0} = \frac{1}{2} S_{AB_0C}$

$S_{ABC_0} = S_{AB_0C} = S_{A_0BC}$

$\Rightarrow S_{AC_0C_1} = S_{BC_0C_1} = S_{A_0BA_1} = S_{A_0CA_1} = S_{AB_1B_0} = S_{CB_1B_0} = y$

что такое O?

4) $\angle COB_1 = \angle C_1OB$ (как вертикальные)

$\angle C_0CB_0$ и $\angle C_0BB_0$ - вписанные, опираются на дугу $\smile C_0AB_0 \Rightarrow$

$\Rightarrow C_0CB_0 = \angle C_0BB_0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BC_0L \sim \triangle B_0CL$ (по 3 углам.)

$\frac{S_{BC_0L}}{S_{B_0CL}} = k^2$

$S_{BC_0L} = S_{B_0CL} = x + y$

$\Rightarrow k = 1 \Rightarrow \triangle BC_0L = \triangle B_0CL \Rightarrow$

5.) $\Rightarrow$ L - середина BB_0 и CC_0 $\Rightarrow$

?

$\Rightarrow$ L - центр окр. (O; r) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ L - точка пересечения серединных перпендикуляров.

L - точка пересечения медиан (по условию)

$\Rightarrow$

$\Rightarrow AA_1, BB_1, CC_1$ - высоты и медианы $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABC$ - равносторонний.

№ 4

$ab+bc+ca=1$

$a, b, c > 0.$

1) $\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})$

это неравенство верно при:

$(a, b, c > 0)$

$$\begin{cases} \frac{a^2+1}{a} \geq 4a \\ \frac{b^2+1}{b} \geq 4b \\ \frac{c^2+1}{c} \geq 4c. \end{cases} \quad \begin{cases} a^2+1 \geq 4a^2 \\ b^2+1 \geq 4b^2 \\ c^2+1 \geq 4c^2 \end{cases} \quad \begin{cases} 1 \geq 3a^2 & (1) \\ 1 \geq 3b^2 & (2) \\ 1 \geq 3c^2 & (3) \end{cases}$$

$(1)+(2)+(3) = \quad 3 \geq 3(a^2+b^2+c^2)$

$1 \geq a^2+b^2+c^2.$

$\underline{a^2+b^2+c^2 \leq ab+bc+ac \leq 1}$

достаточно доказать полученное неравенство

2) $\underbrace{ab}_{<1}+\underbrace{bc}_{<1}+\underbrace{ac}_{<1}=1 \qquad a, b, c > 0.$

- возможно при $a, b, c < 1.$
- при $a, b \geq 1$

$ab > 1 \Rightarrow$ невозможно

$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$ — верно всегда!

а) при $a \geq 1$

$ab < 1 \Rightarrow b < \frac{1}{a}$

пусть $b = \frac{1}{x}$ $\quad x > a > 1$

$ac < 1 \Rightarrow c < \frac{1}{a}$

пусть $c = \frac{1}{y}$ $\quad y > a > 1$

$ab + bc + ac = \frac{a}{x} + \frac{1}{xy} + \frac{a}{y} = 1.$

$\frac{a(x+y)+1}{xy} = 1$

$a(x+y) + 1 = xy.$

xy	4	9	16
$x+y$	$2+2=4$	$3+3=6$	$4+4=8$
xy	$4+1=5$	$9+1=9$	$8+2=10$

заметим, что

$(x+y)$ - наим при $x=y$

тогда $a(x+x)+1 = x^2$

$2ax + 1 = x^2$

$x^2 - 2ax = 1$

$x(x-2a) = 1$

11-2-6

ТЕТРАДЬ

для Региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике

ученицы 11 класса 4 тур

МБОУ „Гимназия школы № 44" г. Курска

Вертаковой

Анастасии Юрьевны.

II тур Шифр: 11-2-6

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	0	
2	0	
3	1	Бжура
4	0	В.

Сумма:

11. 7.

I $\underbrace{a, b, c, d, \dots n}_{300} > 0$.

I $|a-b| = c$
$|b-c| = d$ и т.д.

Для последовательности где каждое число равно разности ~~чисел~~ своих соседей с одной стороны подойдет последовательность чисел Фибоначчи

числа положительные!

(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, и т.д.)

если 300 чисел из данной последовательности расположить по кругу, то условие не будет выполняться только для последнего числа.

а для $a_1 = 0$?

$a_{300} - 1 = 0$

$a_{300} = 1$

Ответ: можно

II если число должно быть равно разности соседей с обеих сторон:

$|a-b| = c$

$|b-c| = d = a$

и т.д.

последовательность принимает вид:

$a\ b\ c\ a\ b\ c\ a\ b\ c \ldots$

$$\begin{cases} |a-b| = c \\ |b-c| = a \\ |c-a| = b \end{cases}$$

Такой последовательности быть не может!

1. $a > b > c$

$$\begin{cases} a-b = c \\ b-c = a \\ c-a = -b \end{cases}$$

$a+b+c-a-b-c=c+a-b$

$0=c+a-b$

$\begin{cases} c+a=b \\ c-a=-b \end{cases}$

$2c=0 \Rightarrow c=0$ Но „0" не положительно $\Rightarrow$

$(a\ b\ 0\ a\ b\ 0)$ не могло

$\Rightarrow a=b$

$a\ a\ 0\ a\ a\ 0$

(2) $c>b>a$

$\begin{cases} a-b=-c \\ b-c=-a \\ c-a=b \end{cases}$

$a+b+c-a-b-c=b-a-c$

$\begin{cases} b=a+c \\ b=c-a \end{cases}$

$2b=2c$

$b=c \Rightarrow b-c=a=0$ $a=0 \not> 0$ не могло

аналогично в остальных случаях

$a>c>b$

$b>a>c$

$b>c>a$

$c>a>b$

Ответ: не могло

№1.5

$y = Ax^2 + Bx + C$

$f(a^2+b^2) \geq f(2ab)$

$A(a^2+b^2)^2 + B(a^2+b^2) + C \geq A(2ab)^2 + B(2ab) + C$

$A((a^2+b^2)^2 - (2ab)^2) + B(a^2+b^2-2ab) \geq 0.$

$A(a^2+b^2-2ab)(a^2+b^2+2ab) + B(a^2+b^2-2ab) \geq 0$

$A(a-b)^2(a+b)^2 + B(a-b)^2 \geq 0.$

$(a-b)^2(A(a+b)^2 + B) \geq 0.$

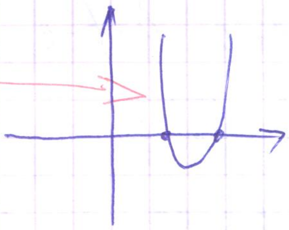
① если $\underline{a=b} \Rightarrow (a-b)^2 = 0.$

? $Ax^2 + Bx + C = Bx + C$ (1 корень)

② $\underline{a \neq b}.$

$A(a+b)^2 + B \geq 0.$

если $A<0$. ?



$B - |A|(a+b)^2 \geq 0$

$\cancel{B \geq |A|(a+b)^2}$

если возьмем огромные a и b, то неравенство невыполнимо.

если $A>0$

$B + A(a+b)^2 \geq 0.$

по теореме Виетта:

$x_1 + x_2 = -\frac{B}{A}$

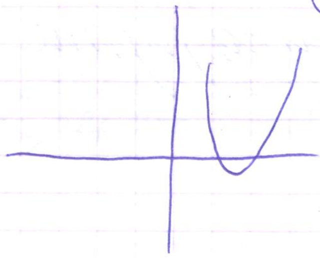
если $x_1, x_2 > 0$, то $-\frac{B}{A} > 0 \Rightarrow -B > 0$

$B < 0$

$A(a+b)^2 \geq -B$

$(a+b)^2 \geq \frac{-B}{A}$

$a+b \geq \sqrt{\frac{-B}{A}}$

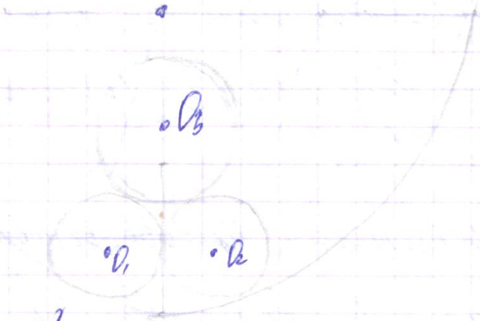


если взять маленькие a и b, то неравенство – невыполнимо

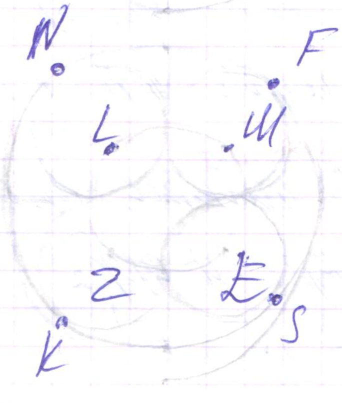
$\Rightarrow B > 0 \Rightarrow x_1 + x_2 < 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ один из корней отрицателен.

11.6.



Дано

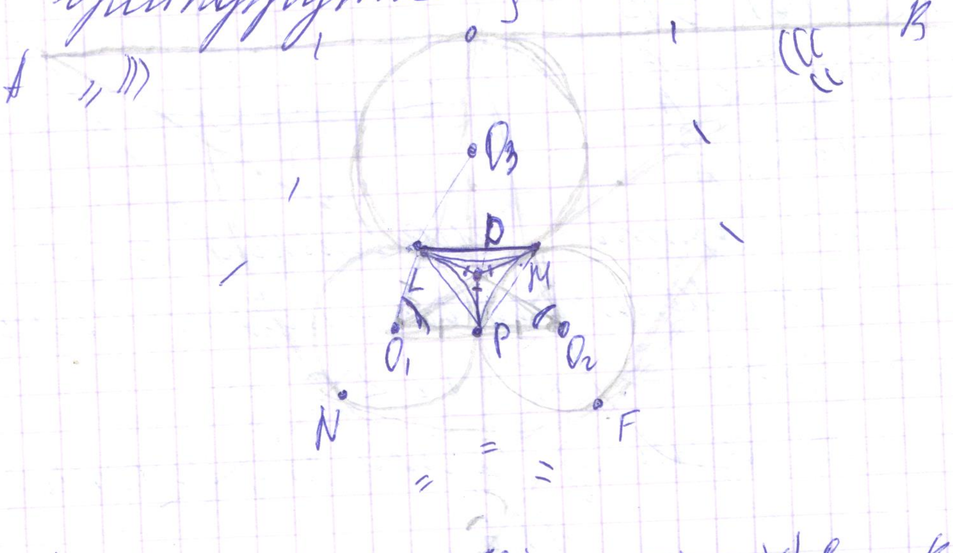


4 апельсина вписаны в окр $\Rightarrow$ ~~они за~~ каждый занимает сектор равный $\frac{1}{4}$ окр

Почему?

Решение

1) Уменьшим высоту вазы так, чтобы крышка касалась грейпфрута



2) ~~проведем касательные AC и BC к окр (O_1, r) и окр (O_2, r) соответственно.~~

2) из точек касания ~~[illegible]~~ с окр$_1$ и окр$_2$ с окр$_3$ (O_3, r) проведем касательные LA и MB

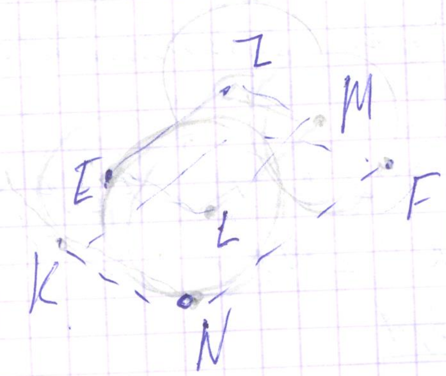
почему они пройдут через т. A и B?

3) из точек A и B также проведем касательные к окр$_1$ и окр$_2$ (точки касания - N и F)

4.) $NC = PC$ (как отрезки касательных)
$FC = PC$ (как отрезки касательных) $\Rightarrow$
$\Rightarrow NC = FC \Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle NPC = \triangle FPC \Rightarrow \angle NCP = \angle FCP$ $\Rightarrow$
5.) аналогично $\angle LDP = \angle MPP$
$\Rightarrow \angle DAN = \angle CBM$
6.) $AN = AL = 1$

В условии ничего не говорится о том, что апельсины касаются друг друга. (—)

4) $LD = MD = PD$ (как отрезки касательных)
$O_1L = O_1P = O_2P = O_2M = r$ $\Rightarrow$
$\angle O_1PD = \angle O_2PD = 90°$
$\Rightarrow \triangle LO_1D = \triangle PO_1D = \triangle PO_2D = \triangle MO_2D$
$\triangle LO_1P = \triangle MO_2P \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle LO_1P = \angle MO_2P$
5.) $\angle MO_2P = \angle LO_1P$
$LO_1 = MO_2$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow LO_1O_2M$ - трапеция $\Rightarrow LM \parallel O_1O_2$
6) аналогично с остальными парами апельсинов
$(LMZE) \parallel (AFSK)$ плоскость с точками касания фруктов апельсинов параллельна плоскости касания вазы.



I
M
E
F
L
K
N