10-1-8

ТЕТРАДЬ

для регионального этапа

всероссийской олимпиады школьников по математике (1 тур)

ученика 10 класса

МОУ „Гимназия №1" школы г. Железногорска

Калиночкина Дениса Александровича

I тур Шифр: 10-1-8

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	7	[signature]
2	7	[signature]
3	0	[signature]
4	0	[signature]

Сумма: 14

10.1

Если хотя бы одно из чисел $x_1 \dots x_{13}$ равно 0, то $a \cdot x_1 \dots x_{13}$, очевидно, также равно 0. Если одно из чисел $x_1 \dots x_{13}$ равно ± 1, то $1+x_i=0$ или $1-x_i=0$ и $a=0$. Таким образом, $a \cdot x_1 \dots x_{13}=0$.

Допустим, ни одно x_i не равно 0 или ± 1. Тогда x_i+1 всегда будет того же знака, что и x_i-1. Получаем, что произведения $(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_{13}+1)$ и $(x_1-1)(x_2-1)\dots(x_{13}-1)$ имеют один знак. Но $(x_1-1)(x_2-1)\dots(x_{13}-1) = -(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})$, т.к. число множителей нечетно. Таким образом,

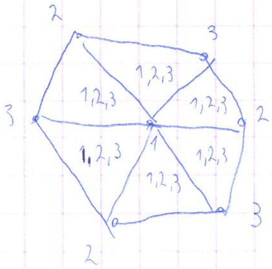
$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_{13}) = -(1-x_1)(1-x_2)\ldots(1-x_{13})$,

$a=-a$, что возможно только при $a=0$. Получаем противоречие.

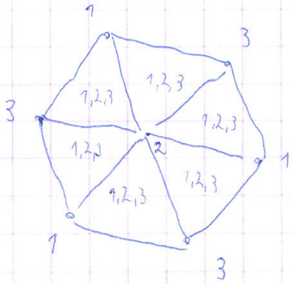
Таким образом, $a\cdot x_1\ldots x_{13}=0$.

10.2.

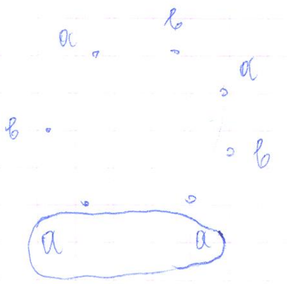
При любом четном n Петя не всегда сможет восстановить число в каждой точке. Например, для многоугольника, в каждом треугольнике которого написаны числа 1; 2; 3, есть хотя бы 2 варианта расположения чисел в точках.



или



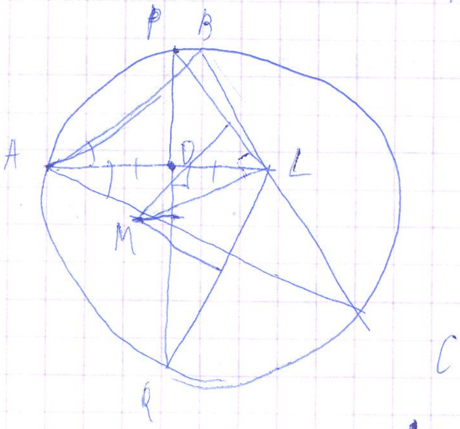
Докажем, что для любого нечетного n расположение чисел однозначно. Заметим, что число в центре многоугольника будет выписано нечетное число раз (1 раз в каждом треугольнике, которых нечетное число; также оно может быть в некоторых треугольниках более 1 раза, но на четность это не влияет), а остальные – четное (число из каждой внешней точки выписано 2 раза – в соседних с ней треугольниках). Таким образом, однозначно определяется центральная точка. Рассмотрим пары оставшихся чисел в каждом треугольнике. Если оба числа в каждой паре равны k, то числа во всех внешних точках равны k. Иначе возьмем любую пару, состоящую из различных чисел (a, b). Если слева или справа от нее в паре есть только одно из чисел a, b, то запишем его в точку между этими треугольниками, а затем пойдем по кругу, вычисляя в каждой точке оставшееся число. Если обе пары, соседние с ней, равны (a, b), возьмем пару слева от текущей и повторим алгоритм для нее. Все пары чисел не могут быть равны (a, b), т.к. либо в какой-то точке было другое число, кроме a и b, либо количества точек с числами a и b имеют разную четность (так как всего точек нечетное число), и когда-нибудь встретится пара (a, a) или (b, b).



Таким образом, для любого нечетного n возможно восстановить число в каждой отмеченной точке.

Ответ: при нечетном n.

10.3



Дано: AL – биссектриса $\triangle ABC$; O – сер. AL

$PQ \perp AL$; $P, Q \in$ опис. окр. ABC

Док-ть: опис. окр. PLQ кас. BC.

Док-во:

Окружность может касаться BC только в точке L.

Докажем, что $ML \perp BC$, где M – центр опис. окр. PLQ, то есть точка пересечения серединных перпендикуляров $\triangle PLQ$

10.4

2

См. след. страницу

10.4

Если хотя бы 2 из чисел a, b, c больше 1, то $ab + bc + ac > 1$.

Изменим порядок следования чисел так, что $a \le 1$, $b \le 1$.

Если $c \le 1$, то

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} + \sqrt{b + \frac{1}{b}} + \sqrt{c + \frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})$$

$$\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} \geq 2(1 + 1 + 1)$$, ~~что всегда верно~~, т.к.

$\sqrt{a + \frac{1}{a}} \geq \sqrt{2}$, $\sqrt{a} \le 1$, аналогично для b и c.

$$c = \frac{1 - ab}{a + b}$$

Упорядочим a, b, c по неубыванию

$a \le \frac{\sqrt{3}}{3}$, т.к. $ab + bc + ca = 1$

$$\sqrt{a + \frac{1}{a}} \le \sqrt{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{3}{\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{4}{\sqrt{3}}} = 2 \cdot 3^{-\frac{1}{4}}$$

$$2\sqrt{a} \geq 2 \cdot 3^{-\frac{1}{4}}$$

10-2-8

ТЕТРАДЬ

для регионального этапа

всероссийской олимпиады школьников по математике (2 тур)

ученика 10 класса

МОУ „Гимназия №1" школы г. Железногорска

Калиночкина Дениса Александровича

Восход

ЛУЧШЕЕ ДЕТЯМ

ЗНАК КАЧЕСТВА

РЕКОМЕНДОВАНО МИНИСТЕРСТВОМ ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

II тур Шифр: 10-2-8

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	6	[signature]
2	7	[signature]
3	1	[signature]
4	5	[signature]

Сумма:

10.5.

После момента t могло проголосовать не более 5 зрителей.

Например, до момента T была единственная оценка 10 (рейтинг равен 10), затем были выставлены 8, 6, 4, 2, 0 (рейтинг был равен 9, 8, 7, 6, 5 соответственно). Докажем, что больше 5 зрителей проголосовать не могло.

Пусть S_i - сумма голосов через i человек после момента T, k - рейтинг в момент T, x - кол-во голосов в момент T.

Тогда, исходя из условий задачи:

$S_0 = k \cdot x$

$S_1 = (k-1)\cdot(x+1)$ и т. д.

Сумма после каждого голоса не уменьшается, то есть

$(k-i)(x+i) \le (k-i-1)(x+i+1)$

$(k-i)(x+i) - (k-i-1)(x+i+1) \le 0$

$\cancel{kx} + ik - ix - i^2 - \cancel{kx} - (i+1)k + (i+1)x + (i+1)(i+1) \le 0$

~~$(2i+1)k - (2i+1)x - i^2 + i^2 + 2i + 1 \le 0$~~

~~$(2i+1)(k-x) \le 1$~~

~~$(2i+1)$~~

$x - k + 2i + 1 \le 0$

$k - x \ge 2i + 1$

$x \ge 1$, т.к. в момент T проголосовал хотя бы 1 человек

$k \le 10$.

$9 \ge 2i + 1$

$i \le 4$

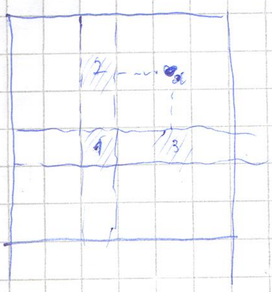
$S_{max} = (k-4-1)(x+4+1) = S_5$

Таким образом, после момента T проголосовало не более 5 человек.

Ответ: 5

10.8

Зафиксируем строку и столбец таблицы $n \times n$

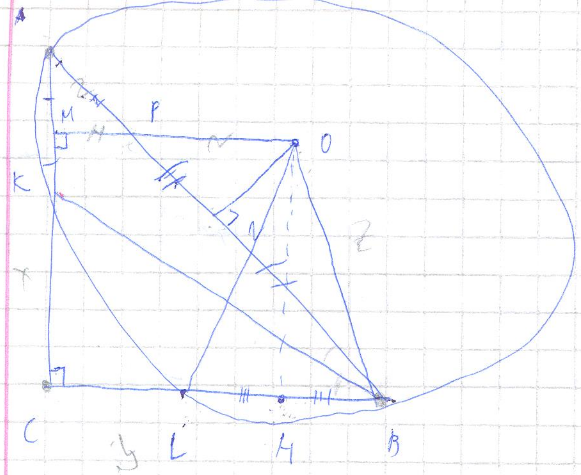


Каждая клетка, не лежащая в строке или столбце, должна быть покрашена в один из трех цветов, отмеченных на рисунке, чтобы условие не выполнялось. Таким образом, если $k \le 2n+1$ (кол-во клеток в строке и столбце), существует раскраска таблицы, для которой условие ложно. Например, это может быть такая раскраска:

1	2	4	6	8	...
3	1	1	1	1	
5	1	1	1	1	...
7	1	1	1	1	
9	1	1	1	1	...

Легко убедиться, что для нее условие не выполнено. Если же $k \geq 2n$, то найдется хотя бы одна клетка, не удовлетворяющая приведенному условию (в строке или столбце не будет клетки, окрашенной в такой же цвет, на соответствующей позиции).

Ответ: при $k \geq 2n$



Дано: $\angle C = 90^\circ$;

BK - биссектриса

Док-ть: $CB + CL = AB$

Решение.

1) Пусть $AC = x$ $\quad BC = y$ $\quad AB = \sqrt{x^2+y^2} = z$

Тогда $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC} = \frac{z}{y}$ (по св-ву биссектрисы)

$AK = \frac{zx}{y+z}$

2) Проведем серед. перпендикуляры $MO \perp AK$, $NO \perp AB$, где O - центр окр., описанной около $\triangle AKB$, $P = AB \cap MO$

$MP \parallel BC$, т.к. они оба перпендикулярны AC

$\triangle AMP \sim \triangle ACB$ ($\angle A$ - общий, $\angle AMP = \angle ACB$)

$MP = \frac{BC \cdot AM}{AC} = \frac{y \cdot AK}{2x} = \frac{zy}{2(y+z)}$

$AP = \frac{AB \cdot AM}{AC} = \frac{z^2}{2(y+z)}$

3) $PN = AN - AP = \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2(y+z)} = \frac{zy}{2(y+z)} = MP$

$PN = MP$

$\angle AMP = \angle PNO = 90^\circ$

$\angle APM = \angle OPN$ – вертикальные

$\triangle AMP = \triangle ONP$ по стороне и 2 углам.

$AP = OP$

Значит, $MP + OP = AP + NP$,

$AN = MO$

$AB = 2AN = 2MO$

4) Проведем $OH \perp LB$

$OL = OB$ – радиусы

$\triangle OLB$ – равноб. по определению

Высота OH совпадает с медианой

$MOHC$ – прямоугольник по определению ($\angle M, \angle C, \angle H$ прямые)

$MO = HC$

5) $HC = CL + LH = \dfrac{CL + CB}{2}$

$AB = 2MO = 2HC = CL + CB$, что и требовалось доказать

10.7

Если $c \le 1050$, Таня может уменьшить его до 0 и у уравнения будет корень 0. В противном случае сумма a и b не превышает 949. За 948 операций он может сделать a равным 1, b равным 0. В запасе остается еще 102

…ения. Коэффициент С [illegible]

квадрат можно сделать из С не более чем за 100 операций (также расстояние между полными квадратами, не превосходящими 2000, меньше 100). Тогда уравнение $x^2+C=0$ будет иметь корень $x=-\sqrt{C'}$, где C' – изменённый коэффициент С.