Ш-1-7

ТЕТРАДЬ

для регионального этапа

Всероссийской олимпиады школьников по математике (I тур)

ученика 10 класса

МБОУ „Гимназия № 44" школы

г. Курска

Зорина Арсения Андреевича

I тур Шифр: 10-1-7

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	1	[signature]
2	3	[signature]
3	1	[signature]
4	0	[signature]

Сумма: 5

...венное бюджетное образовательное ... профессионального образования ...ый государственный ...верситет» ...ТОВИК

N 10.1

$a=(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13})=(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})$

Док-ть $ax_1x_2\dots x_{13}=0$

Предположим что $ax_1x_2\dots x_{13}\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a\neq 0,\ x_1\neq 0, x_2\neq 0, x_3\neq 0, x_4\neq 0, x_5\neq 0, x_6\neq 0, x_7\neq 0, x_8\neq 0,$

$x_9\neq 0,\ x_{10}\neq 0,\ x_{11}\neq 0,\ x_{12}\neq 0,\ x_{13}\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $a\neq 0 \Rightarrow (1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13})\neq 0$ и

и $(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_{13})=(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_{13})\neq 0 \Rightarrow$

~~=> $1+x_1$ должно быть равно какой-то другому другой~~

=> $(1+x_1),(1+x_2),(1+x_3)\dots,(1+x_{13})$ ~~должны~~ каждая сумма чисел должна быть равна какой-то разности из $(1-x_1),(1-x_2)\dots(1-x_{13})$

Например:

$1+x_1=1-x_2$, но $1+x_1\neq 1-x_1$ т.к. $x_1\neq 0$

$x_1=-x_2$ $\qquad$ $2x_1\neq 0$

$x_1\neq 0$

$(1+x_1)$ и $(1-x_2)$
$(1+x_2)$ и $(1-x_1)$
$(1+x_3)$ и $(1-x_4)$
$(1+x_4)$ и $(1-x_3)$
$(1+x_5)$ и $(1-x_6)$
$(1+x_6)$ и $(1-x_5)$
$(1+x_7)$ и $(1-x_8)$
$(1+x_8)$ и $(1-x_7)$
$(1+x_9)$ и $(1-x_{10})$
$(1+x_{10})$ и $(1-x_9)$
$(1+x_{11})$ и $(1-x_{12})$
$(1+x_{12})$ и $(1-x_{11})$
$(1+x_{13})$ и $(1-x_{13})$

~~но т.к. скобок в ко нечетн~~

т.к. скобок в каждой части нечетное кол-во, то ~~хотя~~ б одна из них будет иметь пару с таким же числом x =>

=> $1+x=1-x$

$2x=0$

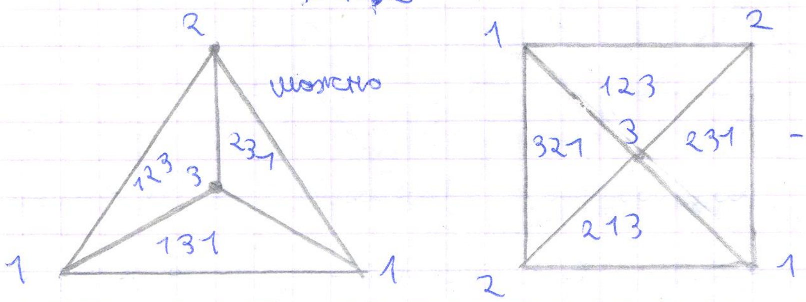
$x=0$, но мы предполагали что $a\neq 0, x_1\neq 0, x_2\neq 0\dots x_{13}\neq 0$ =>

=> это противоречит нашему

предположению => хотя бы одно число из $x_1, x_2, x_3 \dots x_{13}$ равно 0 =>

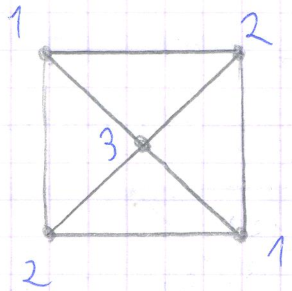
=> $a x_1 x_2 x_3 x_4 \dots x_{13} = 0$

№ 10.2

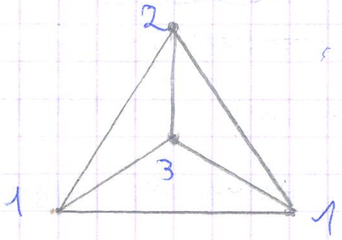


— нельзя.

Петя не сможет восстановить числа в вершинах в том случае, если в каждом треугольнике будут записаны одинаковые ~~числа~~ тройки чисел, но при этом эти числа будут различны. Треугольники всегда имеют одну общую вершину, центр n-угольника => имеют всегда одну общую цифру. Для того, чтобы две другие вершины ~~бы~~ были одинаковые у треугольников надо чтобы числа на вершинах n-угольника чередовались и ~~рядом~~ две рядом стоящие вершины не имели одинаковые цифры:

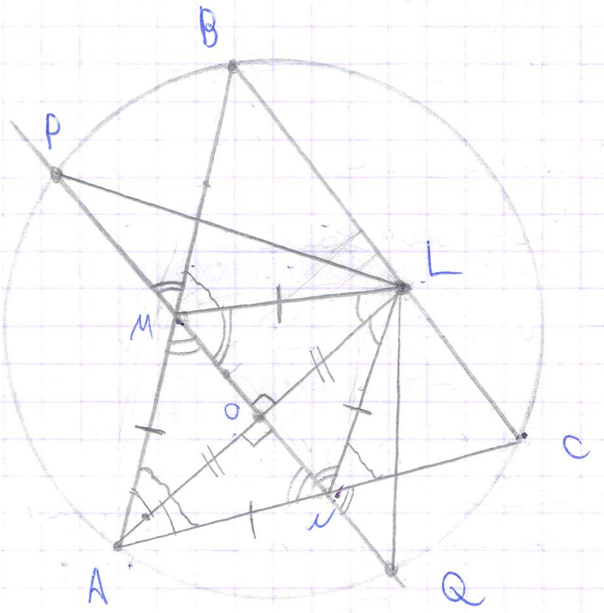


А это возможно только в n-угольнике, ~~в~~ в котором n - четное, а в n-угольнике, в котором n - нечетное ~~в в~~ две рядом стоящие вершины будут иметь одинаковые числа:



Поэтому Петя сможет всегда восстановить числа в каждой точке только в n-угольнике, в котором ~~чис~~ число вершин нечетно т.е. n - нечетное число.

№ 10.3



~~Решен.~~ Док-во:

1) т.к. PQ - серединный перпендикуляр к AL $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $PQ \perp AL$ и $PQ \cap AL = O$ $\Rightarrow$ $AO = OL$

2) т.к. AL - биссектриса $\angle A$ ~~=>~~ ~~AO~~ и $AO \perp PQ$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $\triangle AMN$ - равнобедренный (по ~~св-ву~~ признаку равнобедр. треуг.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $AM = AN$ $\Rightarrow$ AO - медиана (по св-ву равнобедр. треуг.) $\Rightarrow$ $MO = ON$

3) Из (1) и (2) $\Rightarrow$ $AMLN$ - ромб т.к. $AL \perp MN$ и $MO = ON$ и $AO = OL$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ $AM = ML = LN = AN$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AMO = \angle OML = \angle ANO = \angle ONL$

и $\angle MAO = \angle NAO = \angle MLO = \angle NLO \Rightarrow$

$\Rightarrow LN \parallel AB$ и $ML \parallel AC \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~св~~ (по теореме Фалеса)

$\frac{LC}{LB} = \frac{NC}{AN}$ и $\frac{BL}{LC} = \frac{BM}{AM} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{AN}{AC} = \frac{BM}{AN}$ т.к. $AN = AM$ (по док.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AC \cdot BM = \cancel{AM^2} AN^2$

$NC \cdot BM = AN^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ это возможно тогда, когда $BM = NC = AN \Rightarrow$ ~~△~~ MN – средняя линия $\triangle ABC$ (по ~~св~~ по определению средней линии) т.к. $AM = MB = AN = NC \Rightarrow$

$\Rightarrow MN \parallel BC$ (по св-ву средней линии) $\Rightarrow PQ \parallel BC$

т.к. $AM = MB = AN = NC \Rightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный

т.к. $AB = AC \Rightarrow AL$ – серединный перпендикуляр к BC, а т.к. BC – хорда в окр. ~~ст~~ описанной около $\triangle ABC \Rightarrow$

ΔL - серединный перпендикуляр к PQ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ центр описанной окр. около ΔPLQ лежит на прямой ΔL и т.к.

$\cancel{\Delta L}$ $PQ \parallel MN$ и $\Delta L \perp PQ \Rightarrow$ окр описанная около ΔPLQ будет касаться ~~стороны~~ BC

№ 10.4

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}}+\sqrt{b+\frac{1}{b}}+\sqrt{c+\frac{1}{c}} \; \cancel{\geq} \; 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$$

$a+\frac{1}{a} \; \cancel{<} \geq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 3\sqrt{2} \overset{и}{\cancel{\geq}} 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)$

$\frac{3\sqrt{2}}{2} \overset{и}{\cancel{\geq}} \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

$1{,}5\sqrt{2}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}$

т.к. $ab+bc+ca=1$

$\cancel{\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}}$

$\frac{a+1}{2} \geq \sqrt{a}$

$1{,}5\sqrt{2}$ и $\frac{a+b+c+3}{2}$

$3\sqrt{2}$ и $a+b+c+3$

$3(\sqrt{2}-1)$ и $a+b+c$, а $a \leq 1$ и $b \leq 1$ и $c \leq 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 3\left(\sqrt{2}-1\right) \; \cancel{<} \geq a+b+c \Rightarrow$

$\Rightarrow \sqrt{a+\frac{1}{a}} + \sqrt{b+\frac{1}{b}} + \sqrt{c+\frac{1}{c}}$?

10-2-7

ТЕТРАДЬ

для региональный этап Всероссийской олимпиады школьников по математике (II тур)

ученика 10 класса

МБОУ „Гимназии № 44"

г. Курска

Зорин Арсений Андреевич

II тур Шифр: 10-2-7

№ задачи	Баллы	Подписи членов жюри
1	7	
2	7	
3	0	
4	0	

Сумма:

…деральное государственное бюджетное образовательное …реждение высшего профессионального образования «Юго-Западный государственный университет»
ЧИСТОВИК

10.5

В некоторый момент T рейтинг стал целым числом. Т.к. рейтинг определяется средним арифметическим всех оценок, то сумма всех оценок равна $S = r \cdot n$, где r – это рейтинг в момент T, а n – число проголосовавших. Следовательно первый проголосовавший после момента

Т по усл. понизит рейтинг на 1 и он станет равным $r-1$?

$\frac{\cancel{rn+a}}{n+1}+1$ ~~Рейтин~~ Этот рейтинг будет посчитан, как начальная сумма баллов плюс оценка проголосовавшего и все это будет делится на кол-во проголосовавших:

новая оценка

$$\frac{rn+a}{n+1} = r-1$$

$$rn+a=(r-1)(n+1)$$

$$rn+a=rn+r-n-1$$

$\boxed{a=r-n-1}$ - оценка первого проголосовавшего после момента Т

b - оценка ~~про~~ второго проголосовавшего после момента Т

$$\frac{rn+r-n-1+b}{n+2} = r-2$$

$$rn+r-n-1+b = rn+2r-2n-4$$

$\boxed{b=r-n-3}$

c - оценка третьего проголосовавшего после момента T

$$\frac{rn+a+b+c}{n+3} = r-3 \qquad a+b = 2r-2n-4$$

$$rn+2r-2n-4+c = rn+3r-3n-9$$

$$\boxed{c = r-n-5}$$

d - оценка ~~третьего~~ четвертого проголосовавшего после момента T

$$\frac{rn+a+b+c+d}{n+4} = r-4 \qquad a+b+c = 3r-3n-9$$

$$rn+3r-3n-9+d = rn+4r-4n-16$$

$$\boxed{d = r-n-7}$$

e - оценка пятого проголосовавшего после момента T

$$\frac{rn+a+b+c+d+e}{n+5} = r-5 \qquad a+b+c+d = 4r-4n-16$$

$$rn+4r-4n-16+e = rn+5r-5n-25$$

$$\boxed{e = r-n-9}$$

f - оценка шестого проголосовавшего после момента T

$$\frac{rn + a + b + c + d + e + f}{n+6} = r - 6 \qquad a+b+c+d+e = 5r - 5n - 25$$

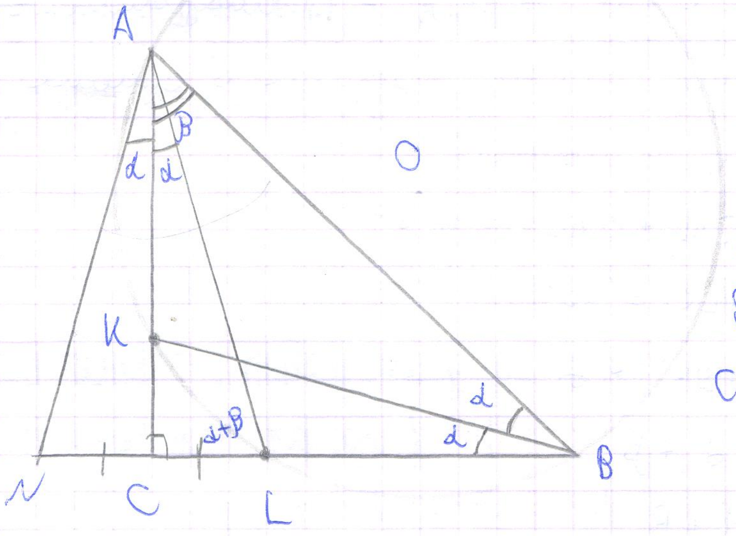
$$rn + 5r - 5n - 25 + f = rn + 6r - 6n - 36$$

$$\left.\begin{array}{l} f = r - n - 11 \\ r_{макс} = 10 \\ n_{мин} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow f < 0$$, чего быть не может (по усл.) =>

=> Наибольшее число проголосовавших ~~в мо~~ после момента T будет равно 5 т.к. ~~нао~~ максимальный ~~средний~~ рейтинг в момент T может быть равен 10, а минимальное число проголосовавших в момент T может быть равно 1. В этом случае число проголосовавших после момента T будет наибольшим и будет равно 5

Ответ: 5

№ 10.6



Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный треугольник

$\angle C = 90^\circ$

BK – биссектриса угла B

окр.$(O; r)$ описана около $\triangle AKB$

окр$(O; r) \cap BC = L$

Док-ть:

$CB + CL = AB$

Док-во:

1) т.к. BK – биссектриса $\angle B$ (по усл.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ $\angle ABK = \angle KBC$ (по определению биссектрисы угла)

2) Пусть $\angle A = \beta$, а $\angle ABK = \alpha \Rightarrow \angle KBC = \alpha$

3) т.к. $\triangle ABC$ - прямоугольный треугольник (по усл.) $\Rightarrow$ (по теореме о сумме углов треугольника $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$

$2\alpha + \beta = 90^\circ$

4) $\angle KBL$ и $\angle KAL$ ~~вписанные~~ в окр $(O; r)$ и ~~опира~~ опираются на одну дугу $\smile KL \Rightarrow \angle KBL = \angle KAL = \alpha$

5) т.к. $\angle C = 90^\circ \Rightarrow \triangle CAL$ - прямоугольный ~~$\triangle CAL$~~ треугольник $\Rightarrow$ (по теореме о сумме угло в треугольнике)

$\angle C + \angle CAL + \angle ALC = 180^\circ$

$\alpha + \angle ALC = 90^\circ$

$\angle ALC = 90^\circ - \alpha$

$90^\circ = 2\alpha + \beta$

$\angle ALC = \alpha + \beta$

6) отложим на продолжении прямой BC за точку C отрезок ~~на~~ CN ~~на~~, где $CN = CL$ и ~~$N \in BC$~~ N принадлежит прямой BC.

7) т.к. $AC \perp NL$ и $CN = CL$ (по построению) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle NAL$ - равнобедренный треугольник т.к. AC - это медиана и высота, $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~по~~ $\angle ANL = \angle ALN = \alpha + \beta$ т.к. $\triangle NAL$ - равнобедренный.

8) $\angle NAB = \angle NAC + \angle CAB$

т.к. $\triangle NAL$ – равнобедренный =>

=> AC – медиана, биссектриса и высота (по св-ву равнобедр. треугольника) =>

=> (по определению биссектрисы)

$\angle NAC = \angle LAC = \alpha$ =>

$\angle NAB = \alpha + \beta$ =>

=> $\angle NAB = \angle ANC = \alpha + \beta$ => $\triangle ABN$ – равнобедренный треугольник (по признаку равнобедр. треуг.) =>

=> (по определению равнобедренного треуг.)

$AB = BN$

~~$BN = NL$ $NC = P$~~

$AB = BN = NC + BC$

$NC = CL$ (по построению) =>

=> $AB = BC + CL$

№ 10.7

$ax^2 + bx + c$ $\qquad a + b + c = 2000$

~~$b1 + bx$~~

$(b-1)x^2 + bx - 1 = 0$ имеет целый корень -1

$x^2 + bx + b - 1 = 0$ имеет всегда
целый корень -1
~~где~~

Мы всегда можем домножить
эти трехчлены на натуральное
число k

$kx^2 + kbx + k(b-1) = 0$

$k(b-1)x^2 + kbx - 1 = 0$

Т.к. разность между двумя
коэффициентами a и b или b и c
не может быть больше 1000
т.к. $a+b+c = 2000$

~~$\Rightarrow$ + имеет возм~~