7 класс

Задача 1. Скорость света. Экспериментатор Глюк исследовал движение солнечного зайчика, который изначально покоился, затем с постоянной скоростью перемещался вдоль прямой, а в конце пути опять замер. Глюк раз в минуту записывал в таблицу координату зайчика. Правда, несколько раз он отвлекался и пропустил несколько измерений (в таблице прочерки).

t, мин	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x, м	0	0	-	7	-	-	-	47	-	-	50

Помогите экспериментатору определить, в какой момент зайчик начал движение. С какой скоростью зайчик перемещался? Как долго он перемещался? Кроме этого, заполните пропуски в таблице.

Задача 2. Который путь длиннее? Первую треть пути автомобиль ехал со скоростью υ_1, а последнюю треть времени – со скоростью υ_3. На втором участке пути его скорость равнялась средней скорости движения на всём пути. Известно, что $\upsilon_1 > \upsilon_3$.
Какой из участков самый короткий, а какой самый длинный?
На каком участке автомобиль находился дольше всего, а на каком – меньше всего?

Задача 3. Коробка с сахаром (1). Кубики сахара-рафинада плотно упакованы в коробку, на которой написано: «Масса нетто (m) = 500 г, 168 штук». Длина самого длинного ребра коробки c = 98 мм. Вдоль самого короткого ребра коробки укладывается ровно 4 кусочка сахара. Чему равна плотность ρ сахара-рафинада?
Примечание: «нетто» это масса продукта без учёта массы упаковки (тары).

Задача 4. С одним велосипедом. Группа туристов из 3 человек направилась из пункта *А* в пункт *Б*, расстояние между которыми L = 22 км. Попутных машин нет ☹. В распоряжении группы есть один велосипед, на котором одновременно могут ехать не больше 2-х человек. Скорость движения пешим ходом составляет $\upsilon_0 = 5$ км/час, при езде на велосипеде одного человека его скорость $\upsilon_1 = 20$ км/час, а при езде вдвоем – $\upsilon_2 = 15$ км/час. Как должны действовать туристы, чтобы за минимальное время добраться до пункта *Б*? Найдите это время.

8 класс

Задача 1. Равновесие. Планка массой m и два одинаковых груза массой $2m$ каждый с помощью лёгких нитей прикреплены к двум блокам (рис. 1). Система находятся в равновесии. Определите силы натяжения нитей и силы, с которыми подставка действует на грузы. Трения в осях блоков нет.

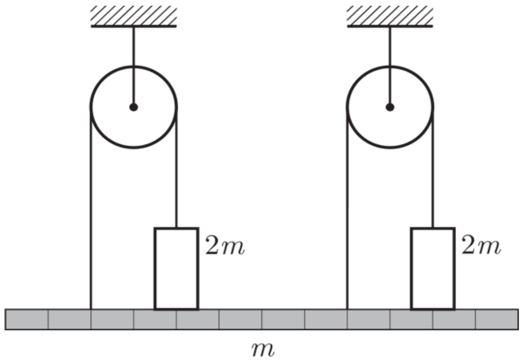

Рис. 1

Задача 2. Неизвестное в неизвестном. Экспериментатор Глюк проводил опыт по погружению кубика изготовленного из неизвестного материала в жидкость неизвестной плотности (рис. 2). В таблицу он занёс показания динамометра, соответствующие различным глубинам погружения кубика. Некоторые значения силы он забыл и не стал их вносить в таблицу.

h, см	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F, Н	8,74	8.09					4,84	4,19	3,93	3,93

По результатам измерений определите плотность кубика и плотность жидкости.

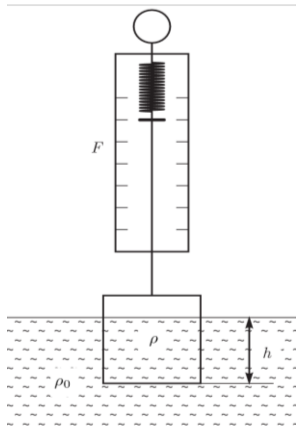

Рис. 2

Задача 3. Коробка с сахаром (2). Кубики сахара-рафинада плотно упакованы в коробку, на которой написано: «Масса нетто (m) = 500 г, 168 штук». Протяженность самого длинного ребра коробки $c = 112$ мм. Вдоль самого короткого ребра коробочки укладывается ровно 3 кусочка сахара. Чему равна плотность сахара-рафинада?

Примечание: 1) Нетто – масса продукта без учёта массы упаковки (тары).

2) Достоверно известно, что плотность сахара-рафинада не превышает 4 10^3 кг/м^3.

Задача 4. Лёд на чашке весов. В одной чашке на равноплечных весах лежит кусок льда, который уравновешен гирей массой 1 кг, находящейся в другой чашке. Когда лед растаял, равновесие нарушилось. Груз какой массы и на какую чашку следует добавить, чтобы восстановить равновесие?

Справочные данные (могут понадобиться для любой из задач!!!)

Ускорение свободного падения g = 9,8 м/с^2.

Плотность дерева (сосны) $\rho_Д$ = 400 кг/м^3

Плотность воздуха ρ_0 = 1,3 кг/м^3.

Плотность воды $\rho_В$ = 1000 кг/м^3.

Плотность льда $\rho_Л$ = 917 кг/м^3.

Возможные решения
7 класс

Задача 1. (Замятнин М.). Из-за редких измерений из таблицы сразу не ясно, в какой момент зайчик начал движение, а в какой – остановился. Можно построить график зависимости координаты от времени и по нему найти время t движения. По коэффициенту наклона графика найдём скорость движения зайчика: υ = 10 м/мин. Разделив перемещение x = 50 м на скорость υ, найдём полное время движения t_0 = 5 мин. Время начала движения можно определить по перемещению за 3-ю минуту. Оно составляет 7 метров, следовательно, зайчик двигался 0,7 мин. Время старта 2,3 мин от начала измерений. На месте пропусков должны быть числа 0 м, 17 м, 27 м, 37 м, 50 м и 50 м соответственно.

Примерные критерии оценивания

Найдена скорость движения зайчика .... 3 балла
Найдено время движения зайчика .... 2 балла
Найдено время начала движения .... 2 балла
Заполнены пропуски в таблице (по 0,5 балла за точку) .... 3 балла

Задача 2. (Слободянин В.). Поскольку $\upsilon_1 > \upsilon_3$, то $\upsilon_{ср}$ справедливо неравенство

$$\upsilon_1 > \upsilon_{ср} = \upsilon_2 > \upsilon_3 . \qquad (1)$$

Учитывая, что $T_1 + T_2 + T_3 = T$, получим

$$T_1 < T_3 < T_2 \qquad (2)$$

На первом участке $\frac{S}{3} = \upsilon_1 T_1$. Следовательно $S > 3\,\upsilon_{ср} T_1$, откуда $T_1 < \frac{S}{3\,\upsilon_{ср}} = \frac{T}{3} = T_3$.

На третьем участке $S_3 = \upsilon_3 \frac{T}{3} < \upsilon_{ср} \frac{T}{3} = \frac{S}{3} = S_1$, и $S_1 + S_2 + S_3 = S$, откуда следует:

$$S_3 < S_1 < S_2 . \qquad (3)$$

Альтернативное решение. По условию на втором участке

$$\upsilon_{ср} = \frac{S_2}{T_2} = \frac{S - \frac{S}{3} - T_3\upsilon_3}{T - \frac{S}{3\upsilon_1} - \frac{T}{3}} .$$

Поделим числитель и знаменатель на T и приведём подобные. В результате получим:

$$\upsilon_{ср} = \sqrt{\upsilon_1 \upsilon_3} .$$

Теперь несложно получить неравенства на перемещения и время движения.

Примерные критерии оценивания

Написано неравенство для скоростей или $\upsilon_{ср}$ выражена через υ_1 и υ_3 .... 2 балла
Написано неравенство для времён движения на соответствующих участках
(по два балла за неравенство).. 4 балла
Написано неравенство для длин соответствующих участков
(по два балла за неравенство) .... 4 балла

Задача 3. (Кармазин С.). Так как в коробке уложено 4 слоя кусочков сахара, то в одном слое их 42 штуки (n = 168/4 = 42). Число 42 можно разложить на простые множители: 42 = 2 · 3 · 7. Следовательно, один слой может иметь размеры 21 · 2 кусочка, 14 · 3 кусочка или 7 · 6 кусочков. Первые два варианта противоречат условию, так как тогда вдоль самого короткого ребра укладывалось бы 2 или 3 кусочка. Таким образом, вдоль длинного ребра укладывается 7 кусочков и, соответственно, размер ребра кубика сахара равен

$$a = c/7 = 98 \text{ мм}/7 = 14 \text{ мм}.$$

Общий объем сахара равен

V = 14 мм · 14 мм · 14 мм · 168 штук ≈ 460992 мм^3 ≈ 0,461 · 10^{-3} м^3.

Плотность сахара $\rho = m/V = 0{,}5/(0{,}461 \cdot 10^{-3}) \approx 1085$ кг/м^3.

Примерные критерии оценивания

Найдено число кусков в слое .... 1 балла
Возможные длины сторон слоя выражены в кусках сахара.. 3 балла
Показано что длины сторон слоя в кусках сахара равны 7 и 6 штук .... 1 балл
Длина ребра куска сахара выражена в мм.. 2 балла
Найден объем куска сахара в мм^3 или м^3 .... 2 балла
Найдена плотность сахара .... 1 балл

Задача 4. (Варламов С.). Время путешествия будет минимальным, если все туристы одновременно прибудут в пункт назначения, а велосипед всё время будет задействован: в сторону от *А* к Б на нём будут ехать двое, а от *Б* к *А* – один).

Пусть два туриста на велосипеде проехали расстояние x. На это им потребовалось время $t_2 = x/\upsilon_2$. Затем один из них до пункта *Б* шёл пешком (и прошёл расстояние $L - x$ за некоторое время t_0), а другой – поехал обратно навстречу своему товарищу, который из *А* шёл пешком. Пусть на обратную дорогу он потратил время τ. Если они встретятся от пункта *А* на расстоянии $y = L - x$, то далее проедут на велосипеде расстояние x и прибудут в пункт *Б* одновременно со спешившимся туристом!

Запишем эти условия на языке формул.

$$\upsilon_0 \left(t_2 + \tau \right) = L - x \,. \qquad (1)$$

За время t_2 пеший турист прошёл расстояние $x_1 = \upsilon_0 t_2 = x\dfrac{\upsilon_0}{\upsilon_2}$. Следовательно, велосипедист проедет обратно, до встречи со своим товарищем, расстояние $l = x - x_1$ за время

$$\tau = \frac{x - x_1}{\upsilon_0 + \upsilon_1} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_0}{\upsilon_2} \frac{x}{\upsilon_0 + \upsilon_1}$$

Подставим в формулу (1) времена t_2 и τ.

$$\upsilon_0 \left(\frac{x}{\upsilon_2} + \frac{\upsilon_2 - \upsilon_0}{\upsilon_2} \frac{x}{\upsilon_0 + \upsilon_1} \right) = L - x \,.$$

Разрешив это уравнение относительно x и подставив числовые значения скоростей и расстояния L, получим: x = 15 км.

Теперь найдём время $t_2 = \dfrac{x}{\upsilon_2} = 1$ час. Расстояние $L - x = 7$ км. Откуда $t_0 = \dfrac{L - x}{\upsilon_0} = 1,4$ часа.

Таким образом, всё время путешествия $T = t_2 + t_0 = 2,4$ часа.

Примерные критерии оценивания

Предложена идея нахождения минимума времени путешествия................................. 3 балла

Конкретизация этой идеи ($y = L - x$).. 1 балл

За формулу (1) или её аналога.. 1 балл

Найдено время τ перемещения велосипедиста в направлении от *Б* к *А*......................... 1 балл

Решена система уравнений и найдено расстояние x .... 3 балла

Найдено время T всего путешествия .... 1 балл

8 класс

Задача 1. (Замятнин М.). Наиболее простое решение получится, если систему, состоящую из блоков, грузов и подставки, рассматривать как единое целое.

Применим для неё правило моментов относительно точек O_1 и O_2, лежащих на линии действия сил натяжения нитей за которые подвешены блоки (рис. 1):

Относительно точки O_2: $$T_3 \cdot 6x - 2mg \cdot 5x - mg \cdot 3x + 2mg \cdot x = 0, \qquad (1)$$

Относительно точки O_1: $$2mg \cdot x + mg \cdot 3x + 2mg \cdot 7x - T_4 \cdot 6x = 0. \qquad (2)$$

Из уравнения (1) следует $T_3 = \dfrac{11}{6}mg$, а из уравнения (2), соответственно, $T_4 = \dfrac{19}{6}mg$.

Сила натяжения нити, удерживающая левый груз, равна $T_1 = \dfrac{T_3}{2} = \dfrac{11}{12}mg$. Аналогично, сила натяжения нити, удерживающая правый груз, равна $T_2 = \dfrac{T_4}{2} = \dfrac{19}{12}mg$. Из условия равновесия левого груза найдём силу, с которой на него действует подставка:

$$N_1 = 2mg - T_1 = \frac{13}{12}mg.$$

Аналогично для правого груза

$$N_2 = 2mg - T_2 = \frac{5}{12}mg.$$

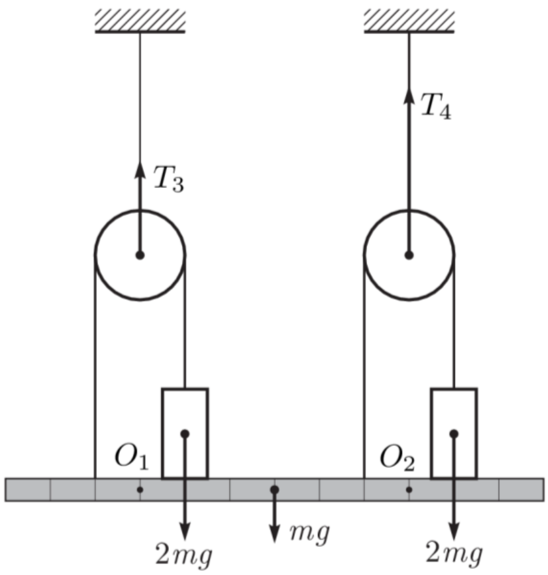

рис. 1

Примерные критерии оценивания

Записано правило моментов для системы (или для грузов и планки) .... 2 балла

Найдены силы натяжения нитей (по 2 балла за каждую)... 4 балла

Записано условие равновесия грузов (по 1 баллу за каждое) .... 2 балла

Найдены силы реакции опоры (по 1 баллу за каждую)... 2 балла

Задача 2. (Замятнин М.). Так как показания динамометра перестают изменяться при погружении кубика на 7,4 см, то длина его ребра равна a = 7,4 см. Это позволяет найти плотность материала из которого изготовлен кубик:

$$\rho = \frac{F(0)}{ga^3} \approx 2{,}2 \text{ г/см}^3.$$

По мере погружения кубика в жидкость сила Архимеда будет возрастать, а показания динамометра уменьшаются. Это будет продолжаться до тех пор, пока кубик полностью не погрузится в жидкость. Максимальная сила Архимеда

$$F_\text{А} = F(7{,}4) - F(0) \approx 4{,}06 \text{ Н}$$

действует на весь объем кубика. Следовательно, плотность жидкости

$$с \approx 1{,}21 \text{ г/см}^3.$$

Примерные критерии оценивания

Найдена сторона кубика .... 2 балла
Получена формула связывающая силу объем и плотность .... 2 балла
Определена плотность кубика .... 2 балла
Записана формула для силы Архимеда .... 2 балла
Определена плотность жидкости .... 2 балла

Задача 3. (Кармазин С.). Так как в коробочке уложено 3 слоя кусочков сахара, то в одном слое n = 168/3 = 56 кусочков. Число 56 можно разложить на простые множители:
56 = 2 · 2 · 2 · 7. Следовательно, один слой может иметь размеры 28 · 2 кусочка, 14 · 4 кусочка или 7 · 8 кусочков. Первый вариант противоречат условию, так как тогда вдоль самого короткого ребра помещалось бы 2 кусочка. Таким образом, вдоль длинного ребра можно положить либо 14, либо 8 кусочков и, соответственно, размер ребра кубика сахара равен либо a_1 = 112мм/14 = 8 мм, либо a_2 = 112мм/8 = 14 мм.

В первом случае:

Общий объем сахара равен V_1 = 8 мм · 8 мм · 8 мм · 168 штук = 8 6016 мм^3 ≈ 86 см^3.

Плотность сахара равна $\rho_1 = m/V_1$ = 500 г/86 см^3 = 5,8 г/см^3 = 5 800 кг/м^3. Такая плотность противоречит условию.

Во втором случае:

Общий объем сахара равен

V_2 = 14 мм · 14 мм · 14 мм · 168 штук = 460 992 мм^3 ≈ 461 см^3.

Плотность сахара равна $\rho_2 = m/V_2$ = 500 г/461 см^3 ≈ 1,08 г/см^3 = 1 080 кг/м^3 .

Примерные критерии оценивания

Найдено число кусков в слое .... 1 балл
Возможные длины сторон слоя выражены в кусках сахара (по баллу за случай) .... 3 балла
Показано, что возможны два варианта раскладки кусочков сахара .... 1 балл
Для каждого случая длина ребра куска сахара выражена в мм (или см или м) .... 1 балл
Для каждого случая найден объем куска сахара в мм^3 (или см^3 или м^3) .... 1 балл
Для каждого случая найдена плотность сахара .... 2 балла
Дан числовой ответ .... 1 балл

Задача 4. (Осин М.). На тела со стороны окружающего воздуха действует сила Архимеда. Обычно по сравнение с весом тел она ничтожна и её не учитывают. В нашем случае это не так. Пусть m – масса льда. Его объем $V_{Л} = \dfrac{m}{\rho_{Л}}$. После плавления льда он превратится в воду. Её объем будет $V_{В} = \dfrac{m}{\rho_{В}}$. Из-за уменьшения объема льда уменьшится и сива Архимеда $\Delta F_A = \rho_0 g\left(\dfrac{m}{\rho_Л} - \dfrac{m}{\rho_В}\right)$, поэтому чашка с водой опустится в низ (равновесие нарушится). Чтобы восстановить равновесие на чашку с гирей следует добавить груз массой $\Delta m = \dfrac{\Delta F_A}{g} = \rho_0\left(\dfrac{m}{\rho_Л} - \dfrac{m}{\rho_В}\right)$. Поскольку сила Архимеда мала по сравнению с весом льда или гири, можно считать, что $m \approx m_1$. Отсюда $\Delta m = m\left(\dfrac{\rho_0}{\rho_Л} - \dfrac{\rho_0}{\rho_В}\right) \approx 0{,}12$ г.

Примерные критерии оценивания

Указано, что изменение показаний весов связано с изменением силы Архимеда ...... 2 балла
Указано, на какую чашку следует положить гирьку .... 1 балл
Найден объем льда .... 1 балл
Найден объем воды .... 1 балл
Найдено изменение сила Архимеда .... 3 балла
Найдена масса гирьки .... 2 балла